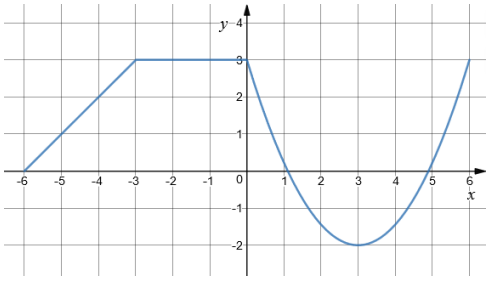
**MVE425: TEKNISKT BASÅR – MATEMATIK, DEL B**
**SVÅRARE UPPGIFTER**

11 DECEMBER 2018

## 1. Funktionsbegreppet

**Problem 1.1.** Figuren nedan visar grafen för funktionen $y = f(x)$ då $-6 \leq x \leq 6$. Skissa grafer till följande sammansatta funktioner:




(a) $f(x) + 1$
(b) $f(x + 1)$
(c) $f(x - 2) + 3$
(d) $2f(x)$
(e) $f(2x)$
(f) $|f(x)|$
(g) $f(|x|)$
(h) $f(-|x|)$

**Problem 1.2.** Antag att funktionen $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ är omvändbar och dess invers betecknas av $f^{-1}$. Undersök om funktionen $g$ är omvändbar och bestäm $g$:s invers i så fall, uttryckt m.h.a. $f^{-1}$ om

$$\text{(a) } g(x) = \frac{1}{1 + f(x)}, \quad x \geq 0; \qquad \text{(b) } g(x) = f(x^2), \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \text{(c) } g(x) = f(x)^2, \quad x \geq 0.$$

T.ex. om $g(x) = f(x) - 2$, där $x \geq 0$, så är $g^{-1}(y) = f^{-1}(y + 2)$, där $y \geq -2$.

**Problem 1.3.** För vilka reella konstanter $a$, $b$ och $c$ gäller att funktionen

$$f(x) = \frac{x - a}{bx - c}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : bx \neq c\},$$

är sin egen invers, d.v.s. att $f^{-1}(x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$?

**Problem 1.4.** Antag att $f$ och $g$ båda är strängt växande reellvärda funktioner och definierade för alla reella tal. Är

$$\text{(a) } f + g, \qquad \text{(b) } fg, \qquad \text{(c) } f \circ g$$

nödvändigtvis strängt växande? Ange motexempel i annat fall.
(d) Lös (a)–(c) men med ”växande” utbytt mot ”avtagande”.

## 2. Exponential- och logaritmfunktionen

**Problem 2.1.** Bestäm inversen till $f(x) = 3 - e^{2x} + 2e^x$ vars definitionsmängd $D_f$ ges av (a) $x \geq 0$; (b) $x \leq 0$.

**Problem 2.2.** De hyperboliska funktionerna definieras m.h.a. exponentialfunktionen på följande sätt:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Bestäm inversa funktioner till dessa. Observera dock att cosh inte är omvändbar (eftersom det är en jämn funktion) och så ska inversen hittas för den restringerade funktionen $\cosh|_{[0,\infty)}$.

**Problem 2.3.** Härled följande räknelagar för de hyperboliska funktionerna:

(a) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
(b) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
(c) $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
(d) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

**Problem 2.4** (Falska räknelagar)**.** Endast i undantagsfall gäller att:

(i) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$; (ii) $\ln(x-y) = \ln x - \ln y$; (iii) $e^{x+y} = e^x + e^y$; (iv) $e^{x-y} = e^x - e^y$.

(a) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal $x$ och $y$ sådana att likheten **inte gäller**.
(b) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal $x$ och $y$ sådana att likheten **råkar gälla**. (Det kan behövas att man först löser deluppgiften (c).)
(c) För varje ”räknelag” ovan, försök lösa ut $y$. Bestäm på så sätt för vilka reella tal $x$ det finns något reellt tal $y$ så att likheten gäller.

**Problem 2.5** (Falska räknelagar 2)**.** Endast i undantagsfall gäller att:

$$\text{(i) } \ln(x^p) = (\ln x)^p; \qquad \text{(ii) } (e^x)^p = e^{x^p}.$$

(a) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal $x$ och $p$ sådana att likheten **inte gäller**.
(b) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal $x$ och $p$ sådana att likheten **råkar gälla**.
(c) För varje ”räknelag” ovan, försök lösa ut $x$. Bestäm på så sätt för vilka reella tal $p$ det finns något reellt tal $x$ så att likheten gäller.

## 3. De trigonometriska funktionerna

**Problem 3.1** (Herons formel)**.** Bevisa Herons formel:

$$\text{Arean av } \triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)},$$

där $a, b, c$ är triangelns sidolängder.

*Tips:* Utgå från areasatsen och använd cosinussatsen samt trig:ettan. För att kunna klara av faktoruppdelningen under rottecknet, så behöver man konjugat- och kvadreringsreglerna.

*Anmärkning:* Vanligtvis formulerar man Herons formel på följande sätt:

$$\text{Arean av } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

där $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ är triangelns semiperimeter, d.v.s. halva omkretsen.

**Problem 3.2.** Använd någon av de kända formlerna för trigonometriska funktioner för att bevisa likheten

$$\frac{\sin(u+v) + \sin(u-v)}{2} = \sin u \cos v$$

och sedan med hjälp av det formeln

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Man kan också (på liknande sätt) härleda formlerna för $\sin\alpha - \sin\beta$ och $\cos\alpha \pm \cos\beta$.

**Problem 3.3** (Falska räknelagar)**.** Endast i undantagsfall gäller att:

(i) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$; (ii) $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$; (iii) $\tan(x+y) = \tan x + \tan y$.

(a) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal $x$ och $y$ sådana att likheten **inte gäller**.
(b) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal $x$ och $y$ sådana att likheten **råkar gälla**.
(c) För varje ”räknelag” ovan, försök lösa ut $y$. Bestäm på så sätt för vilka reella tal $x$ det finns något reellt tal $y$ så att likheten gäller. Observera dock att detta är extremt svårt för cosinus.

**Problem 3.4.** Lös ekvationen $\tan 2v = 4\tan v$. Vid behov kan svaret innehålla något arcus-uttryck.

**Problem 3.5.** Antag att $\tan u = \dfrac{1}{7}$ och $\tan v = \dfrac{3}{4}$. Vilka värden kan vinkeln $u+v$ anta?

**Problem 3.6.** Antag att $\alpha$, $\beta$ och $\gamma$ är de inre vinklarna i en triangel. Bevisa att

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

*Tips:* $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; $\sin u = \sin(2\cdot\frac{u}{2})$; $1 + \cos v = 1 + \cos(2\cdot\frac{v}{2}) = \cdots = 2\cos^2\frac{v}{2}$.

**Problem 3.7.** Antag att triangeln $ABC$ är likbent och sidan $c = AB$ bildar dess bas. Visa att

$$\text{(a) } c = 2a\cos\alpha; \qquad \text{(b) } c^2 = 2a^2(1-\cos\gamma)\,.$$

**Problem 3.8.** Antag att en pentagon (d.v.s. en regelbunden femhörning) är inskriven i en cirkel med radie $r = 4$ l.e. Bestäm pentagonens sidolängd, omkrets och area.
Lös uppgiften också för en allmän regelbunden $k$-hörning där $k \geq 3$.

## 4. De komplexa talen

**Problem 4.1** (Falska räknelagar)**.** Antag att $w = u + iv$ är ett givet komplext tal. Bestäm sambandet mellan $x$ och $y$ i det komplexa talet $z = x + iy$ så att

$$\text{(a) } \mathrm{Re}\,(w\cdot z) = \mathrm{Re}\,(w)\cdot\mathrm{Re}\,(z); \qquad \text{(b) } \mathrm{Im}\,(w\cdot z) = \mathrm{Im}\,(w)\cdot\mathrm{Im}\,(z).$$

Finn några specifika exempel på talen $w$ och $z$ så att likheterna ovan (i) inte gäller, (ii) råkar gälla.

**Problem 4.2.** Bestäm samtliga möjliga värden på exponenten $n \in \mathbb{Z}$ sådana att

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

**Problem 4.3.** Tolka geometriskt (o)likheten

$$\text{(a) } \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < 0; \qquad \text{(b) } |z-1| = \mathrm{Re}\,(z+1).$$

*Med andra ord:* bestäm vilken figur man får när talen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ som uppfyller den givna (o)likheten tolkas som punkter i planet.
*Obs:* Det kommer att vara några kägelsnitt.

**Problem 4.4.** Finn alla reella talpar $x, v$ som löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x\cos(4v) - 4\sqrt{x}\cos(2v) + 4 = 0 \\ x\sin(4v) - 4\sqrt{x}\sin(2v) - 2 = 0 \end{cases}$$

*Obs:* Det kommer att finnas två väldigt olika typer av talpar som löser ekvationen. Den ena typen kommer att ha snälla värden på $v$, medan den andra typen kommer att kräva att $v$ uttrycks m.h.a. någon arcus-funktion.

*Tips:* Multiplicera andra ekvationen med $i$, sedan addera ekvationerna ihop, utnyttja $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$. En lämplig substitution kommer att förvandla ekvationen till en andragradare med komplexa koefficienter.

**Problem 4.5.** Antag att $n \in \mathbb{Z}$. Förenkla det komplexa talet $(\cos 2 + i\sin 2 + 1)^n$. Skriv ditt svar i polär form.

*Tips:* Dubbla vinkelns formler kommer att användas någonstans på vägen.

**Problem 4.6.** Låt $z$ och $w$ vara två komplexa tal som uttrycks i polär form som $z = Re^{i\alpha}$ och $w = Re^{i\beta}$, där $R > 0$ är talens gemensamma absolutbelopp.
(a) Beräkna $|z+w|$ och $\arg(z+w)$ förutsatt att $-\pi \leq \alpha - \beta \leq \pi$.
(b) Beräkna $|z-w|$ och $\arg(z-w)$ förutsatt att $0 \leq \alpha - \beta \leq 2\pi$.
(c) Beräkna $|z-w|$ och $\arg(z-w)$ förutsatt att $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

*Tips:* Använd formlerna härledda i Problem 3.2.

## 5. Gränsvärden

**Problem 5.1.** Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}, \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 0}\frac{3 - 4\cos x + \cos 2x}{x^4}, \qquad \text{(c) } \lim_{x\to\pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x\,.$$

**Problem 5.2.** Antag att $m, n, p, q$ är positiva heltal. Bestäm:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x^m} - 1}{\sqrt[q]{x^n} - 1}.$$

*Tips:* Man kan relativt lätt bestämma gränsvärdet i (b) med hjälp av resultatet av (a) genom att göra variabelbytet $x = t^k$ med någon lämplig exponent $k$.

**Problem 5.3.** Räkna ut följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{27} - (n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13} - (n^2-1)^{13}}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3\cos n + n^2 \sin n)^{100} - (n^3 \sin n + n^2)^{100}}{(n^9 + n^5 \cos n + n^2 \sin n)^{34}}.$$

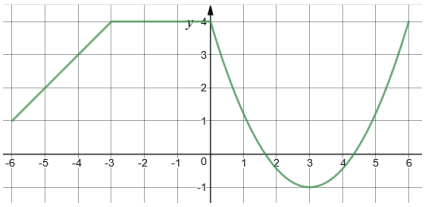
*Tips:* Det behövs inte att fullständigt utveckla parenteserna. Det räcker att bestämma vilka termer som blir största i täljaren och i nämnaren och strunta i allt annat.

**Problem 5.4.** Finn reella tal $a$ och $b$ sådana att gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \left( \frac{7^{\ln x}}{x^a} - bx \right)$ existerar och beräkna detta gränsvärde.

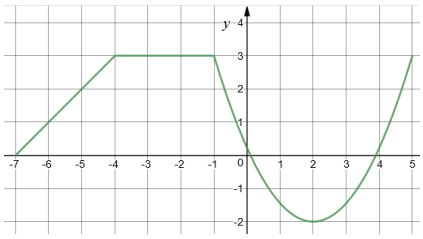
## Svar

**1.1.**

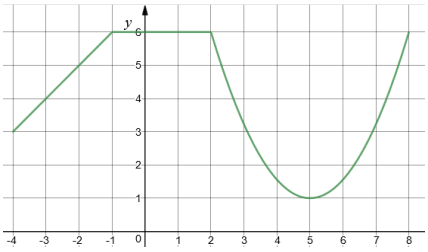
(a)



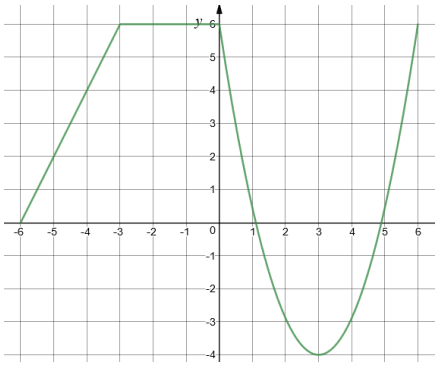
(b)



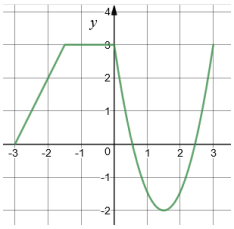
(c)



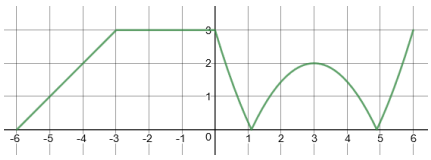
(d)



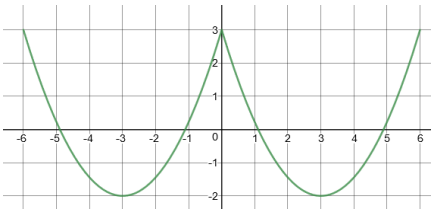
(e)



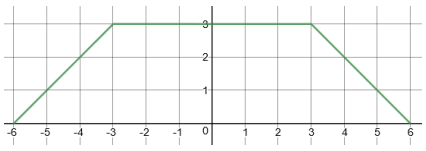
(f)



(g)



(h)



**1.2.** (a) $g^{-1}(y) = f^{-1}(\frac{1}{y} - 1)$, där $y \in (0, 1]$.
(b) Restriktionen till $x \geq 0$ får inversen $g^{-1}(y) = \sqrt{f^{-1}(y)}$, där $y \in [0, \infty)$.
Restriktionen till $x \leq 0$ får inversen $g^{-1}(y) = -\sqrt{f^{-1}(y)}$, där $y \in [0, \infty)$.
(c) $g^{-1}(y) = f^{-1}(\sqrt{y})$, där $y \in [0, \infty)$.

**1.3.** $a = b = 0$ och $c = -1$, alltså $f(x) = x$; eller $c = 1$ medan $a, b \in \mathbb{R}$ godtyckliga, alltså $f(x) = \dfrac{x-a}{bx-1}$.

**1.4.** (a) Ja
(b) Nej, t.ex. $f(x) = -e^{-x}$, $g(x) = e^{2x}$. Då blir $f(x)g(x) = -e^{x}$, vilket är strängt avtagande
(c) Ja
(d-a) Ja
(d-b) Nej, t.ex. $f(x) = g(x) = -x$. Då blir $f(x)g(x) = x^2$, vilket är strängt avtagande för $x \leq 0$ men strängt växande för $x \geq 0$.
(d-c) Nej, t.ex. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -x$. Då blir $f(g(x)) = e^{x}$, vilket är strängt växande

**2.1.** (a) $f^{-1}(y) = \ln(1 + \sqrt{4-y})$, där $y \leq 4$.
(b) $f^{-1}(y) = \ln(1 - \sqrt{4-y})$, där $3 < y \leq 4$.

**2.2.** Formeln för $\cosh^{-1}$ nedan anger inversen till $\cosh|_{[0,\infty)}$, medan $\cosh_*^{-1}$ anger inversen till $\cosh|_{(-\infty,0]}$.

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}), \quad y \in \mathbb{R}, \qquad \cosh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}), \quad y \in [1, \infty),$$
$$\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+y}{1-y}\Big), \quad y \in (-1, 1), \qquad \cosh_*^{-1}(y) = \ln(y - \sqrt{y^2-1}), \quad y \in [1, \infty),$$

**2.3.** I likheterna (a)–(b) ska du utgå från HL och ersätta sinh och cosh enligt deras definitioner. Sedan utveckla/förenkla HL tills du får uttrycket på VL. Likheten (c) bevisas på liknande sätt som additionsformeln för den vanliga (trigonometriska) tangensfunktionen. I likheten (d) ska man ersätta cosh och sinh enligt deras definitioner och sedan utveckla/förenkla tills man får en etta.

**2.4.** (i-a) $x = y = 1$ (i-b) $x = y = 2$; (i-c) $y = \dfrac{x}{x-1}$, där $x > 1$.

(ii-a) $x = 2, y = 1$ (ii-b) $x = 4, y = 2$ (ii-c) $y = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x}}{2}$, där $x \geq 4$

(iii-a) $x = y = 0$ (iii-b) $x = y = \ln 2$ (iii-c) $y = x - \ln(e^x - 1)$, där $x > 0$

(iv-a) $x = y = 0$ (iv-b) $x = \ln 4, y = \ln 2$ (iv-c) $y = \ln \dfrac{e^x \pm \sqrt{e^{2x} - 4e^x}}{2}$, där $x \geq \ln 4$

**2.5.** (i-a) $x = e, p \neq 1$ godtyckligt (i-b) $x = 1, p \in \mathbb{Z}^+$ godtyckligt
(i-c) $x = 1$ med $p > 0$; eller $p = 1$ och $x > 0$; eller $x = e^{p^{1/(p-1)}}$, där $0 < p \neq 1$

(ii-a) $x = 1, p \neq 1$ godtyckligt (ii-b) $x = p = 1$
(ii-c) $x = 0 < p$; eller $p = 1$ och $x \in \mathbb{R}$; eller $x = p^{1/(p-1)}$, där $1 \neq p \in \mathbb{R}$.

**3.3.** (i-a) $x = y = \pi/2$ ger $\sin(x+y) = \sin\pi = 0$, medan $\sin x + \sin y = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2$.
(i-b) $x = k\pi, y = n\pi$, där $k, n \in \mathbb{Z}$ är godtyckliga heltal. Då är $\sin(x+y) = 0 = \sin x + \sin y$
(i-c) $x = 2k\pi$ och $y$ godtyckligt; eller $y = 2k\pi$ och $x$ godtyckligt; eller $y = -x + 2k\pi$.
(ii-a) $x = y = 0$. Då är $\cos(x+y) = 1$, medan $\cos x + \cos y = 2$.
(ii-b) $x = \pi/3, y = -\pi/3$. Då är $\cos(x+y) = \cos(0) = 1$ och $\cos x + \cos y = \cos(\pi/3) + \cos(-\pi/3) = 1/2 + 1/2 = 1$.
(ii-c) När man sätter $x = u + v$ och $y = u - v$, då är likheten $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$ sann om vinklarna $u$ och $v$ uppfyller ekvationen $2\cos^2 u - 2\cos u \cos v - 1 = 0$.

Om $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq v \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ med något heltal $k$, så $u = \pm\arccos\big(\frac{1}{2}(\cos v + \sqrt{2 + \cos^2 v})\big) + 2n\pi$, där $n$ är ett godtyckligt heltal.

Om $\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \leq v \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ med något heltal $k$, så $u = \pm\arccos\big(\frac{1}{2}(\cos v - \sqrt{2 + \cos^2 v})\big) + 2n\pi$, där $n$ är ett godtyckligt heltal.
(iii-a) $x = y = \pi/4$ ger $\tan(x+y) = \tan\pi/2 = \lightning$ (odefinierad), medan $\tan x + \tan y = \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4} = 2$.
(iii-b) $x = k\pi, y = n\pi$, där $k, n \in \mathbb{Z}$ är godtyckliga heltal. Då är $\tan(x+y) = 0 = \tan x + \tan y$

(iii-c) $x = k\pi$ och $y \in D_{\tan}$ godtyckligt; eller $y = k\pi$ och $x \in D_{\tan}$ godtyckligt; eller $y = -x + k\pi$.

**3.4.** $v = k\pi$ eller $v = \pm \arctan(1/\sqrt{2}) + k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.

**3.5.** $u + v = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

**3.8.** Pentagon: sidolängden $a = 8 \sin 36^\circ = 2\sqrt{10 - \sqrt{20}}$ l.e., omkretsen $P = 5a = 10\sqrt{10 - \sqrt{20}}$ l.e., arean $A = 40 \sin 72^\circ = 10\sqrt{10 + \sqrt{20}}$ a.e.
$k$-gon: sidolängden $a = 8 \sin \frac{180^\circ}{k}$ l.e., omkretsen $P = k \cdot a = 8k \sin \frac{180^\circ}{k}$ l.e., arean $A = 8k \sin \frac{360^\circ}{k}$ a.e.

**4.1.** (a) Ifall $w$ är ett reellt tal, så får $z \in \mathbb{C}$ vara godtyckligt.
Ifall $w$ är ett icke-reellt tal, så måste $z \in \mathbb{R}$.
Ex: Likheten gäller inte för $w = 1 + i$, $z = 1 - i$. Den råkar gälla för $w = 2 + 3i$ och $z = 4$.

(b) Ifall $w = 0$, så får $z \in \mathbb{C}$ vara godtyckligt.
Ifall $\operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w \neq 0$ (d.v.s. $u = v \neq 0$), så måste $z \in \mathbb{C}$ vara rent imaginärt, d.v.s. $\operatorname{Re} z = 0$ (d.v.s. $x = 0$).
Ifall $\operatorname{Re} w \neq \operatorname{Im} w$ (d.v.s. $u \neq v$), så krävs det att $\operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} w - \operatorname{Re} w} \cdot \operatorname{Re} z$ (d.v.s. $y = vx/(v - u)$).
Ex: Likheten gäller inte för $w = 3 + 4i$ och $z = 3 - 4i$. Den råkar gälla för $w = 1 + 3i$ och $z = 2 + 3i$.

**4.2.** $n = 12k - 2$, där $k \in \mathbb{Z}$.

**4.3.** (a) Den öppna cirkelskivan med medelpunkten i origo och radien 1.
*Anmärkning:* Öppna cirkelskivan = det område som begränsas av cirkeln, men själva cirkeln (alltså områdets rand) ingår INTE.

(b) Parabeln med brännpunkten i $(1, 0)$ och styrlinjen som ges av ekvationen $x = -1$ (alltså lodrät linje).
Parabelns ekvation är $y^2 = 4x$.

**4.4.** $x = 2$ med $v = k\pi - \frac{\pi}{8}$, där $k \in \mathbb{Z}$, är den snälla massan lösningar.
$x = 10$ med $v = k\pi + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$, där $k \in \mathbb{Z}$, är den andra massan lösningar.

**4.5.** $(2 \cos 1)^n e^{in}$, där $n \in \mathbb{Z}$.

**4.6.** (a) $|z + w| = 2R \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$; $\arg(z + w) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.
(b) $|z - w| = 2R \sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$; $\arg(z - w) = \frac{\alpha + \beta + \pi}{2}$.
(c) $|z - w| = 2R \sin(\frac{\beta - \alpha}{2})$; $\arg(z - w) = \frac{\alpha + \beta - \pi}{2}$.

**5.1.** (a) 1, (b) $1/2$, (c) $-1$

**5.2.** (a) $m/n$, (b) $\frac{m/p}{n/q} = \frac{mq}{np}$

**5.3.** (a) $81/8191$, (b) 0.

**5.4.** 3 möjliga lösningar: (i) $a > \ln 7$ och $b = 0$ gör att gränsvärdet blir 0;
(ii) $a = \ln 7$ och $b = 0$ gör att gränsvärdet blir 1;
(iii) $a = \ln(7/e)$ och $b = 1$ gör att gränsvärdet blir 0.