Tentamen i Matematik, del C, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425 C
Telefonvakt: Dawan Mustafa tel. 0739-900967
Datum: 19 mars 2016
Tid för tentamen: 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga.
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

---

1. Beräkna derivatan av följande funktioner.

   (a) $f(x) = e^{7x} \sin x$ (2p)

   Lösning: Produktregeln och kedjeregeln ger att

   $$f'(x) = 7e^{7x} \sin x + e^{7x} \cos x = e^{7x}(7 \sin x + \cos x)$$

   (b) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$ (2p)

   Lösning: Kvotregeln och kedjeregeln ger att

   $$f'(x) = \frac{(1+x^2)e^{x^2} \cdot 2x - e^{x^2} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2}}{(1+x^2)^2}.$$

   (c) $f(x) = \cos^5(2-2x)$ (2p)

   Lösning: Kedjeregeln ger att

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 5\cos^4(2-2x) \cdot D[\cos(2-2x)] \\ &= 5\cos^4(2-2x) \cdot (-\sin(2-2x)) \cdot (-2) \\ &= 10\cos^4(2-2x)\sin(2-2x). \end{aligned}$$

2. Funktionen $y = y(x)$ är implicit definierad enligt ekvationen

   $$x^3 y + xy^5 + y = 3.$$

   Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(1, 1)$. (7p)

Lösning: Notera att punkten $(1,1)$ ligger på kurvan. Implicit derivering ger att

$$\frac{d}{dx}(x^3y + xy^5 + y) = \frac{d}{dx}(3).$$

Det gäller att

$$\begin{aligned} & 3x^2\ y + x^3\ y' + y^5 + x\ 5y^4\ y' + y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y'(x^3 + 5xy^4 + 1) + 3x^2y + y^5 = 0 \\ \Rightarrow\ & y' = \frac{-3x^2y - y^5}{x^3 + 5xy^4 + 1}. \end{aligned}$$

Tangentens lutning i punkten(1,1) ges av

$$y'(1) = -\frac{4}{7}.$$

Tangentens ekvation ges då av

$$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{4}{7} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{7}x + \frac{11}{7}.$$

3. Konstruera kurvan $y = \dfrac{2x^2+6}{x-1}$. (8p)

Lösning: Sätt $f(x) = y$. Vi går igenom de fem stegen som gäller för kurvkonstruktion enligt föreläsningsanteckningarna.

1. $D_f = \{x : x \neq 1\}$.
2. Lodräta asymptoter:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty \ \text{ och } \ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Linjen $x = 1$ är lodrät asymptot.

Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ \text{ och } \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Inga vågräta asymptoter.

Sneda asymptoter:
k:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

m:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6-2x^2+2x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+6}{x-1}=2.$$

Samma räkningar ger att

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=2.$$

Det gäller att linjen $y=2x+2$ är sned asymptot då $x\to\pm\infty$.

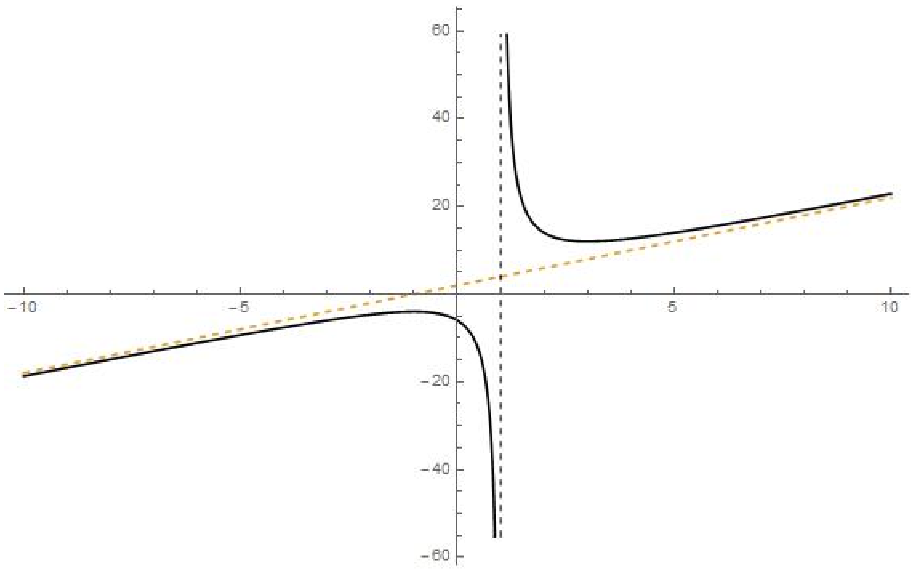
3.
$$f'(x)=\frac{(x-1)4x-(2x^2+6)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}=\frac{2(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

Kritiska punkter: $x=-1,3$.
Singulära punkter: $1\notin D_f$. Inga.

4. Teckschema för $f'(x)$:

x	$(-\infty)$		-1		1		3		(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	∞

5. Rita en skiss av kurvan:



4. Betrakta funktionen $f(x) = e^{-x}(x^2+2x+1)$, definierad på $D_f = [0, 4]$. Bestäm största och minsta värde för funktionen. Bestäm också alla inflektionspunkter. (8p)

Lösning:
Randpunkter: $f(0) = 1$ och $f(4) = 25e^{-4}$.
Singulära punkter: Inga.
Kritiska punkter:

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + e^{-x}(2x + 2) = e^{-x}(1 - x^2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1 \notin D_f.$$

Det gäller att $f(1) = 4e^{-1}$.
Nu undersöker vi derivatans tecken med hjälp av teckenschema:

x	0		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	$25e^{-4}$

Funktionens största värde är $4e^{-1}$ och minsta värde är $25e^{-4}$.

Inflektionspunkter:

$$f''(x) = -e^{-x}(1 - x^2) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1).$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2},\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \notin D_f.$$

Med hjälp teckenschema ser man att $f''(x)$ växlar tecken i $x = 1 + \sqrt{2}$, och således är inflektionspunkt.

5. Undersök, med hjälp av kurvkonstruktion, hur många reella rötter ekvationen $e^x - xC + 2C = 0$ har för olika värden på konstanten C. (8p)

Lösning: Omskrivning ger att

$$e^x - xC + 2C = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x-2} = C.$$

Sätt $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$. Vi konstruerar kurvan till $f(x)$.

1. $D_f = \{x : x \neq 2\}$.
2. Lodräta asymptoter:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty.$$

Linjen $x = 2$ är lodrät asymptot.

Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

Vågrät asymptot $y = 0$ då $x \to -\infty$.

Sneda asymptoter:
k:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2 - 2x} = \infty.$$

Inga sneda asymptoter

3.

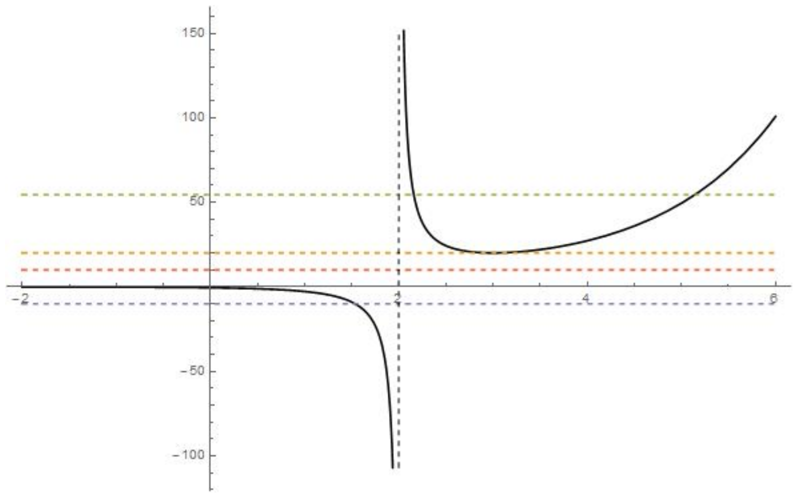
$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x - e^x}{(x-2)^2} = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$$

Kritiska punkter: $x = 3$.
Singulära punkter: $2 \notin D_f$. Inga.

4. Teckschema för $f'(x)$:

x	$(-\infty)$		2		3		(∞)
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	e^3	$\nearrow$	∞

5. Rita en skiss av kurvan tillsamman med linjen $y = C$ för olika värden på C.



Antal reella rötter:

$C < 0$	1 rot
$0 \leq C < e^3$	Inga
$C = e^3$	1 rot
$C > e^3$	2 rötter

6. Låt $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition. (5p)

Lösning: Derivatans definition ger att

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2+1} - \frac{1}{x^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+1-((x+h)^2+1)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

7. Formulera och bevisa satsen om derivatan av en produkt. (4p)

8. Formulera och bevisa satsen om derivatans nollställen. (4p)