Basåret, del C, 6 april 2018
Kortfattade lösningar

1. (a)

$$Dx \ln(3x) = \ln(3x) + x\,\frac{3}{3x} = \ln(3x) + 1\ ,$$

(b)

$$\begin{aligned} D\sin^3(x^2+1) &= 3\sin^2(x^2+1) D\sin(x^2+1) \\ &= 3\sin^2(x^2+1)\cos(x^2+1) D(x^2+1) \\ &= 6x\sin^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\ , \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} D\frac{x}{e^{x^2}} &= Dxe^{-x^2} = e^{-x^2} + xe^{-x^2} D(-x^2) \\ &= e^{-x^2}(1-2x^2) = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}\ . \end{aligned}$$

2. Funktionen $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$ är deriverbar (och alltså kontinuerlig) på det slutna intervallet $[0,2]$ och har alltså ett största och ett minsta värde. De kan antas i intervallets ändpunkter och i punkter där derivatan är 0.

   Vi har $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2)$ som har nollställena $x = 1$ och $x = -2$. Bara den första ligger i intervallet $[0,2]$. Så extremvärdena antas för något av $x = 0$, $x = 1$ eller $x = 2$. Eftersom $f(0) = 0$, $f(1) = -\frac{7}{2}$ och $f(2) = 2$ är det största värdet 2 och det minsta $-\frac{7}{2}$.

3. Vi bestämmer först ekvationen för tangenten genom en godtycklig punkt (a, a^2) på kurvan. Eftersom $y' = 2x$ har tangenten riktningskoefficienten $2a$ och ekvationen

$$\frac{y-a^2}{x-a} = 2a \text{ eller } y - a^2 = 2a(x-a)\ .$$

   Tangenten går genom $(2,3)$ om

$$3 - a^2 = 2a(2-a) \text{ eller } a^2 - 4a + 3 = 0\ .$$

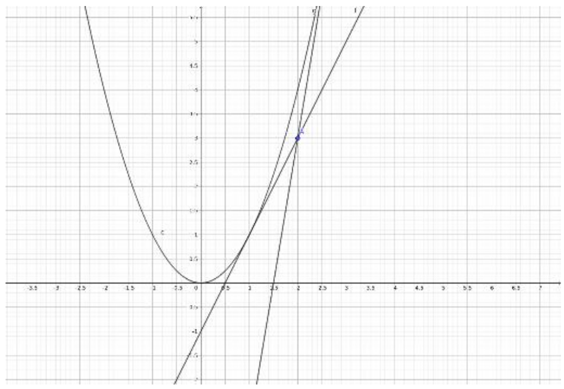
   Ekvationen har rötterna $a = 1$ och $a = 3$. De sökta tangenterna är alltså

$$y - 1 = 2(x-1) \text{ eller } y = 2x - 1$$

och

$$y - 9 = 6(x-3) \text{ eller } y = 6x - 9 \ .$$

Här är en bild:



4. Om vi deriverar $\sin(y(x)) + xy(x) = 0$ ger kedjeregeln att

$$\cos(y(x))y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0 \ .$$

Sätter vi $x = 0$ får vi, eftersom $y(0) = \pi$, att

$$\cos(\pi)y'(0) + \pi = 0, \ -y'(0) + \pi = 0 \text{ och } y'(0) = \pi \ .$$

5. Ekvationen $Cx^3 = x^2 - 3$ har aldrig roten $x = 0$. Om $x \neq 0$ kan ekvationen skrivas

$$f(x) = C \text{ där } f(x) = \frac{x^2-3}{x^3} = x^{-1} - 3x^{-3} \ .$$

Så

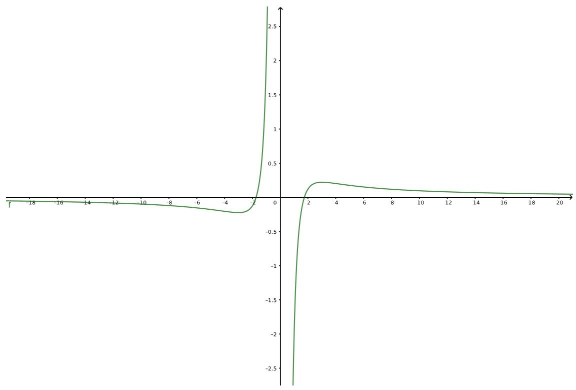
$$f'(x) = 9x^{-4} - x^{-2} = -\frac{x^2-9}{x^4} = -\frac{(x-3)(x+3)}{x^4} \ .$$

Vi får följande teckentabell:

x		-3		0		3	
$f'(x)$	$- - --$	0	$+ + ++$	ej def.	$+ + ++$	0	$- - --$
$f(x)$	$\searrow$	$2/9$ max	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	$-2/9$ min	$\searrow$

Vi observerar också, att $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-$, och att $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to 0-} f(x) = \infty$

Skiss:



Vi ser att vi har

En rot då $C < -2/9$ och $C > 2/9$,
två rötter då $C = -2/9$, $C = 2/9$ och $C = 0$
och tre rötter då $-2/9 < C < 0$ och $0 < C < 2/9$.

6. Funktionen $f(x) = e^x \frac{x}{2x-1}$ är definierad då $x \neq \frac{1}{2}$.

Eftersom $\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = -\infty$ är $x = \frac{1}{2}$ en lodrät asymptot.

Vidare är $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x-1} = +\infty$ eftersom e^x växer snabbare än x. Så $f(x)$ har ingen asymptot då $x \to +\infty$.

Men när $x \to -\infty$ gäller $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \cdot 1 = 0$, så x-axeln är en vågrät asymptot då$x \to -\infty$.

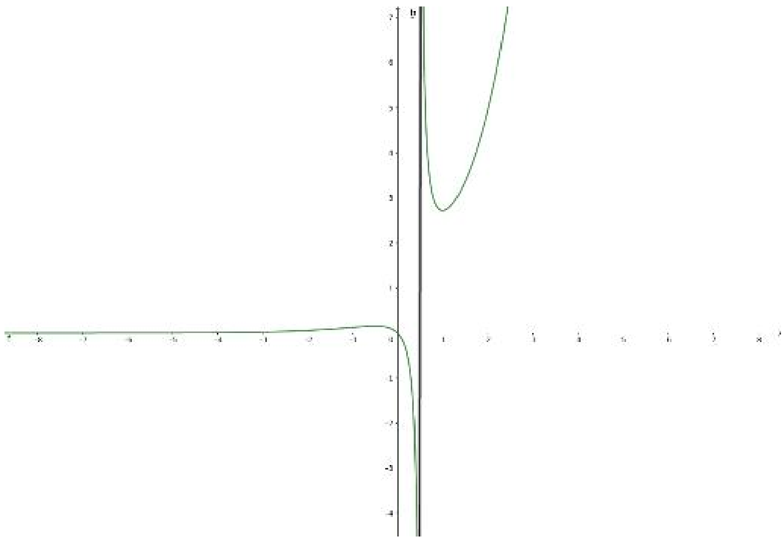
Derivering ger

$$
\begin{aligned}
f'(x) = e^x \frac{x}{2x-1} + e^x \frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2} &= e^x \frac{x(2x-1)-1}{(2x-1)^2} \\
= e^x \frac{(2x^2-x-1)}{(2x-1)^2} &= e^x \frac{(x-1)(2x+1)}{(2x-1)^2} \ .
\end{aligned}
$$

Vi får följande teckentabell:

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	ej def.	$----$	0	$++++$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4\sqrt{e}}$ max	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	e min	$\nearrow$

Skiss:



7&8. Se kurslitteraturen.