Lösningar till tentamen för MVE425C

Lördagen den 21 mars, $8^{30} - 12^{30}$

1. Beräkna derivatan av följande funktioner:

(a) $e^{2x}\tan(x)$

$$\begin{aligned} D\left(e^{2x}\tan(x)\right) &= D\left(e^{2x}\right)\tan(x) + e^{2x}D\left(\tan(x)\right) = 2e^{2x}\tan(x) + e^{2x}(1+\tan^2(x)) \\ &= e^{2x}(1 + 2\tan(x) + \tan^2(x)) \end{aligned}$$

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

$$D\left(\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = D\left(-\ln\left(1+x^2\right)\right) = -\frac{2x}{1+x^2}$$

(c) $\sin^3(4x+2)$

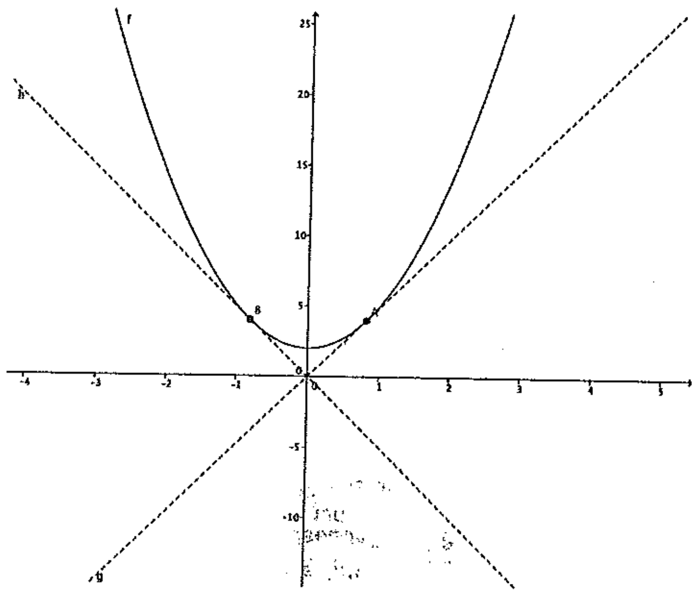
$$\begin{aligned} D\left(\sin^3(4x+2)\right) &= 3\sin^2(4x+2)D(\sin(4x+2)) = 3\sin^2(4x+2)\cos(4x+2)D(4x+2) = \\ &= 12\sin^2(4x+2)\cos(4x+2) \end{aligned}$$

2. Betrakta funktionskurvan av $f(x) = 3x^2 + 2$. Hitta de punkter på kurvan vars tangenter passerar genom origo.

Vi börjar med att ta fram ekvationen för tangenten i en godtycklig punkt $(a; f(a))$. Derivatan ges av $f'(x) = 6x$ och med hjälp av enpunktsformeln kan vi skriva ekvationen för tangenten:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \iff y - (3a^2 + 2) = 6a(x - a)$$

vilket efter förenkling ger $y(x) = 6ax - 3a^2 + 2$. En sådan tangent passerar genom origo om och endast om $y(0) = 0$. Detta ger ekvationen $y(0) = -3a^2 + 2 = 0$ som har lösningarna $a = \pm\sqrt{2/3}$. Funktionsvärdet i dessa punkter är $f(\pm\sqrt{2/3}) = 4$ och de två punkterna är $(\sqrt{2/3}, 4)$ och $(-\sqrt{2/3}, 4)$. Bilden nedan visar lösningen grafiskt.



3. Låt $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3}$. Bestäm funktionens definitionsmängd, lokala extrempunkter, asymptoter, samt skissa funktionens graf.

Vi följer arbetsgången för kurvkonstruktion:

1. Bestäm definitionsmängd. Vi ser att nämnaren i funktionen ges av $N(x) = x^2 - 3$, och har därmed att $N(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$. Vi har att täljaren $T(\pm\sqrt{3}) \neq 0$, vilket innebär att $D_f = \{x; x \neq \pm\sqrt{3}\}$. Randpunkter för D_f är $-\infty, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \infty$

2. Bestäm eventuella asymptoter. Vi har lodräta asymptoter i $x = -\sqrt{3}$ och $\sqrt{3}$. Nära dessa beter sig funktionen enligt:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = \infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = \infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = -\infty$$

   Vi undersöker nu sneda asymptoter:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x(x^2-3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^3-3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(2/x+1/x^3)}{x^3(1-3/x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2/x+1/x^3}{1-3/x^2} = 0.$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+1/x^2)}{x^2(1-3/x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+1/x^2}{1-3/x^2} = 2$$

   Alltså $y = kx + m = 0x + 2 = 2$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

3. Lokala extrempunkter.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-3) - (2x^2+1)2x}{(x^2-3)^2} = -\frac{14x}{(x^2-3)^2}$$

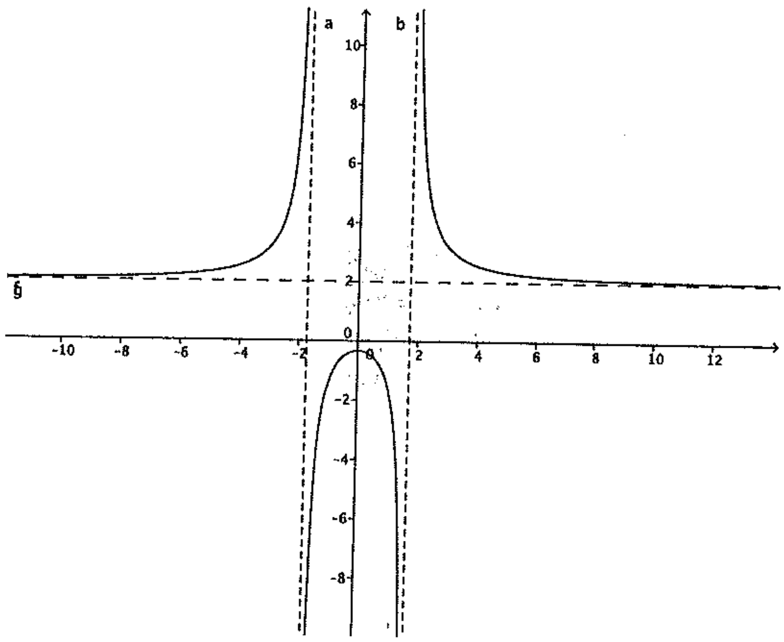
   Extrempunkter ges av lösningar till $f'(x) = 0$ och eftersom nämnaren är nollskild i D_f så har vi att $f'(x) = 0 \iff -14x = 0 \iff x = 0$.

   Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ runt denna punkt och finner att $f'(-1) = 7/2$ och $f'(1) = -7/2$. Alltså tecken växling $+, 0, -$ och ett lokalt maximum.

4. Teckentabell för $f'(x)$ och $f(x)$. Intressanta punkter är: $-\infty, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \infty$. Vi använder informationen ovan och komplementerar med att $f'(-2) > 0$, $f'(2) < 0$ och att $f(0) = -1/3$.

x	∞		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	2	$\nearrow$	∞ / $-\infty$	$\nearrow$	$-1/3$	$\searrow$	$-\infty$ / ∞	$\searrow$	2

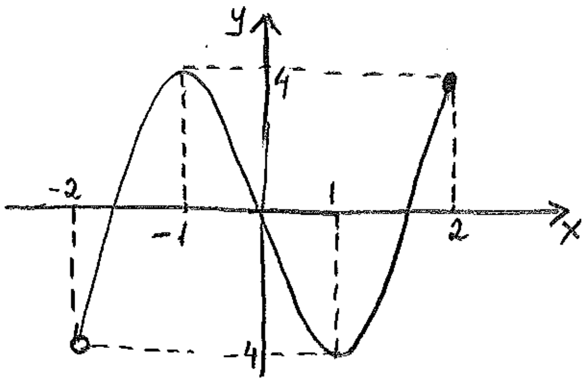
Med informationen i tabellen kan vi nu skissa grafen som ser ut som nedan.



4. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x) = 2x^3 - 6x$ definierad på $D_f = (-2, 2]$.

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\cancel{-4}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4



Det framgår att $f(x)$ antar både ett största och minsta värde på intervallet $[-2, 2]$.
Största värdet är 4, som antas för $x = -1$ och $x = 2$.
Minsta värdet är -4, som antas för $x = 1$.

5. Låt $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$. Bestäm funktionens definitionsmängd, lokala extrempunkter och asymptoter. Bestäm även inflexionspunkter, på vilka intervall funktionen är konkav respektive konvex, samt skissa funktionens graf.

Vi följer arbetsgången för kurvkonstruktion:

1. Bestäm definitionsmängd. Funktionen f kan också skrivas $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{e^x}$ med nämnare $N(x) = e^x$, men $e^x \neq 0$ för alla x vilket innebär att f är definierad för alla x och $D_f = \mathbb{R}$.

2. Bestäm eventuella asymptoter. Eftersom $D_f = \mathbb{R}$ finns inga lodräta asymptoter.

   Vi undersöker nu sneda asymptoter och börjar med $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+2}{xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+2/x+2/x^2)}{xe^x} = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+2/x+2/x^2)}{e^x} = 0.$$

$$m = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+2}{e^x} - 0x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+2/x+2/x^2)}{e^x} = 0.$$

   Alltså $y = kx + m = 0$ är en asymptot då $x \to \infty$.

   Vi undersöker nu $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+2}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+2/x+2/x^2)}{xe^x} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+2/x+2/x^2)}{e^x} = [t = -x] = \lim_{t\to\infty} \frac{-t(1-2/t+2/t^2)}{e^{-t}} = \\ = \lim_{t\to\infty} -t(1-2/t+2/t^2)e^t = -\infty$$

   Alltså existerar ingen asymptot då $x \to -\infty$.

3. Lokala extrempunkter. $(f'(x) = 0)$

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x}(2x+2) = -x^2e^{-x} = 0 \iff x = 0.$$

   Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ runt denna punkt och finner att $f'(-1) = -1/e$ och $f'(1) = -1/e$. Alltså tecken växling $-, 0, -$ och vi har en terasspunkt.

4. Inflexionspunkter.

   Inflexionspunkter är lösningar till ekvationen $f''(x) = 0$, men vi måste också försäkra oss om att f'' växlar tecken i dessa punkter.

$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}(x^2 - 2x).$$

$$f''(x) = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ eller } 2$$

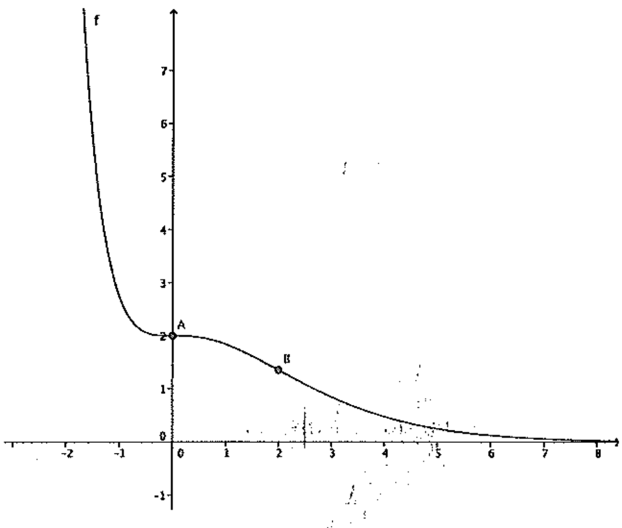
Vi undersöker tecknet kring dessa punkter och ser att $f''(-1) = 3e > 0$, $f''(1) = -e < 0$ och $f''(3) = 3/e > 0$. Vi har alltså teckenväxling kring $x = 0$ och 2.

Funktionsvärdet i dessa punkter är $f(0) = 2$ och $f(2) = 10/e^2$ och vi kan därför sluta oss till att $(0; 2)$ och $(2; 10/e^2)$ är inflexionspunkter. Vi kan också sluta oss till att f är konvex på $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ och konkav på $(0, 2)$.

5. Teckentabell för $f''(x)$, $f'(x)$ och $f(x)$. Intressanta punkter är: $-\infty, 0, 2, \infty$.

x	$-\infty$		0		2		∞
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$	2	$\searrow$	$10/e^2$	$\searrow$	0

Med informationen i tabellen kan vi nu skissa grafen som ser ut som nedan.



6. Bestäm konstanten k sådan att funktionen $f(x) = ke^{-x} + \ln x$ har ett lokalt extremvärde i punkten $(1; f(1))$. Bestäm även typen av extremvärdet.

Ett extremvärde karakteriseras av $f'(x) = 0$. Vi måste alltså bestämma konstanten k så att $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = -ke^{-x} + \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = -k/e + 1 = 0 \iff k = e.$$

För att undersöka karaktären på extremvärdet beräknar vi f''. Insättning av $k = e$ ger $f(x) = e^{1-x} + \ln x$ och

$$f'(x) = -e^{1-x} + \frac{1}{x}$$

samt

$$f''(x) = e^{1-x} - \frac{1}{x^2}.$$

Alltså har vi $f''(1) = 0$ och andraderivatan hjälper oss därför inte, utan vi behöver göra en teckenstudie av f' runt den kritiska punkten. Vi ser då att $f'(1/2) = -\sqrt{e} + 2 > 0$ och $f'(2) = -1/e + 1/2 > 0$, alltså teckenväxlingen $+, 0, +$ vilket svarar mot en terasspunkt.

7. Formulera Lagranges medelvärdessats.

Antag att funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet (a, b), då finns minst en punkt $\xi \in (a, b)$ sådan att

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$