Lösningar till tentamen för MVE425C

Lördagen den 18 april, $14^{00} - 18^{00}$

1. Beräkna derivatan av följande funktioner:

(a) x^2e^x

$$D\left(x^2e^x\right) = D\left(x^2\right)e^x + x^2D\left(e^x\right) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$$

(b) $\dfrac{1}{\cos(x^2)}$

$$D\left(\frac{1}{\cos(x^2)}\right) = \frac{D(1)\cos(x^2) - 1D(\cos(x^2))}{(\cos(x^2))^2} = \frac{0\cos(x^2) - D(\cos(x^2))}{(\cos(x^2))^2} =$$
$$= -\frac{D(\cos(x^2))}{(\cos(x^2))^2} = -\frac{-\sin(x^2)D(x^2)}{(\cos(x^2))^2} = \frac{2x\sin(x^2)}{(\cos(x^2))^2} = \frac{2x\tan(x^2)}{\cos(x^2)}$$

(c) $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}$

$$D\left(\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}D\left(x^3 + 2x^2 + 1\right) = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$$

2. Funktionen $y = y(x)$ är implicit definierad enligt $y^2x^2 + y^3 + x^2 = 2$. Bestäm ekvationen för normalen till kurvan i punkten $(1/\sqrt{2}; 1)$.

Ekvationen för normalen i punkten $(1/\sqrt{2}; 1)$ ges av enpunktsformeln enligt

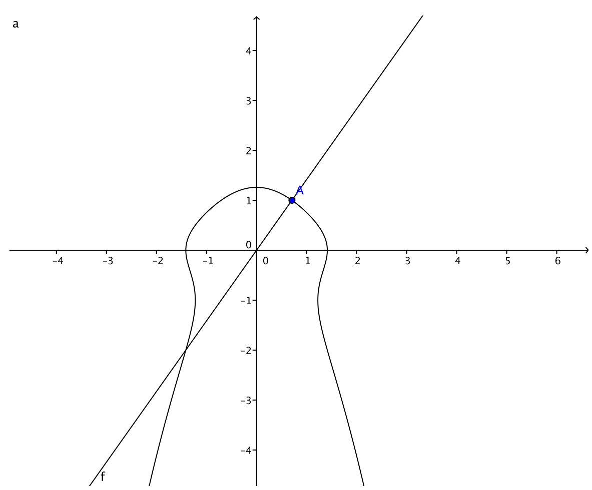
$$y - 1 = -1/y'(1/\sqrt{2})(x - 1/\sqrt{2})$$

Vi måste alltså beräkna $y'(x)$ vilket vi gör genom att derivera uttrycket implicit.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(y^2x^2 + y^3 + x^2\right) = \frac{d}{dx}(2)\\
&\frac{d}{dx}\left(y^2x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 0\\
&\frac{d}{dx}\left(y^2\right)x^2 + y^2\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 0\\
&2yy'x^2 + y^2 2x + 3y^2y' + 2x = 0\\
&y'(2yx^2 + 3y^2) + 2y^2x + 2x = 0\\
&y'(2yx^2 + 3y^2) = -(2y^2x + 2x)\\
&y' = -\frac{2y^2x + 2x}{2yx^2 + 3y^2}
\end{aligned}$$

Insättning ger nu att $y'(1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$. Normalens ekvation kan därför skrivas

$$\begin{aligned}
&y - 1 = -1/y'(1/\sqrt{2})(x - 1/\sqrt{2}) \iff y - 1 = \sqrt{2}(x - 1/\sqrt{2})\\
&\iff y - 1 = \sqrt{2}x - 1 \iff y = \sqrt{2}x
\end{aligned}$$



3. Låt $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2}$. Bestäm funktionens definitionsmängd, lokala extrempunkter, asymptoter, samt skissa funktionens graf.

Vi följer arbetsgången för kurvkonstruktion:

1. Bestäm definitionsmängd. Vi ser att nämnaren i funktionen ges av $N(x) = x^2 - 2$, och har därmed att $N(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$, vilket innebär att $D_f = \{x; x \neq \pm\sqrt{2}\}$. Randpunkter för D_f är $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

2. Bestäm eventuella asymptoter. Vi har möjliga lodräta asymptoter i $x = -\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$. Nära dessa beter sig funktionen enligt:

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{x^3}{x^2-2} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{x^3}{x^2-2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^3}{x^2-2} = \infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x^3}{x^2-2} = -\infty$$

   Vi har alltså lodräta asymptoter i $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

   Vi undersöker nu sneda asymptoter:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3(1-2/x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-2/x^2} = 1.$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2-2)}{x^2-2} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-2/x} = 0$$

   Alltså $y = kx + m = 1x + 0 = x$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

3. Kritiska punkter.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-2) - x^3 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}$$

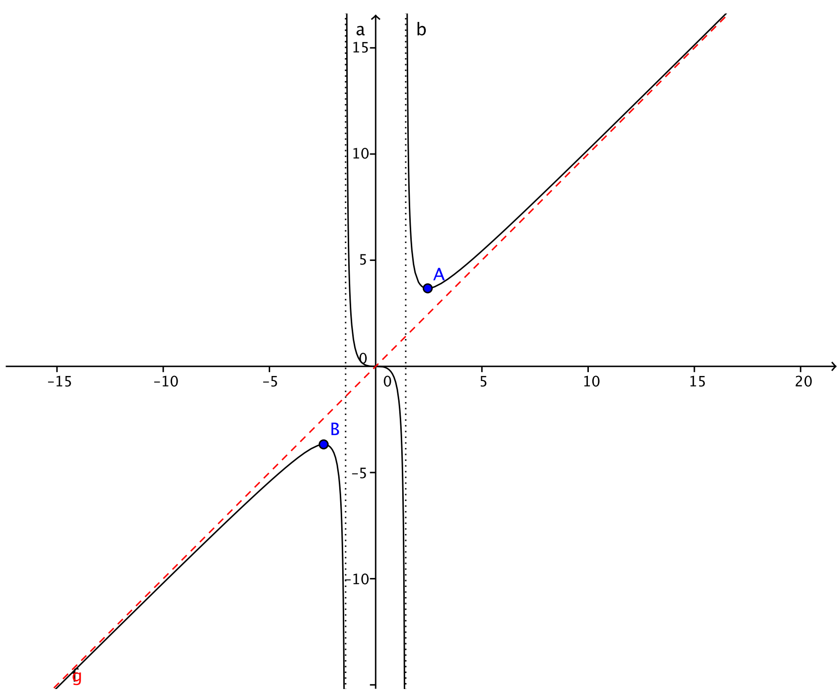
   Kritiska punkter ges av lösningar till $f'(x) = 0 \iff x^2(x^2-6) = 0 \iff x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{6}$.

Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ runt punkterna $x = -\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}$. $f'(4) = f'(-4) = 10/49 > 0$ och $f'(1) = f'(-1) = -5 < 0$. Alltså har vi teckenväxlingen $+, 0, -$ runt $x = -\sqrt{6}$ (lokalt maximum), $-, 0, -$ runt $x = -0$ (terasspunkt, ej extrempunkt) och $-, 0, +$ runt $x = \sqrt{6}$ (lokalt minimum).

4. Teckentabell för $f'(x)$ och $f(x)$. Intressanta punkter och gränsvärden är: $-\infty, -\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, \infty$. Vi använder informationen ovan och kompletterar med att $f(-\sqrt{6}) = -3^{3/2}/\sqrt{2}$, $f(\sqrt{6}) = 3^{3/2}/\sqrt{2}$ och $f(0) = 0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$		∞
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	1
$f(x)$		$\nearrow$	$-3^{3/2}/\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ / ∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ / ∞	$\searrow$	$3^{3/2}/\sqrt{2}$	$\nearrow$	

Med informationen i tabellen kan vi nu skissa grafen som ser ut som nedan.



4.Beräkna det kortaste avståndet från origo till kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Betrakta en godtycklig punkt på kurvan. Den har koordinater $(x; 1/\sqrt{x})$. Avståndet d från origo $(0; 0)$ till $(x; 1/\sqrt{x})$ fås med hjälp av Pythagoras sats

$$d^2 = (0 - x)^2 + (0 - 1/\sqrt{x})^2 = x^2 + 1/x = f(x)$$

Minimera nu d genom att minimera $f(x)$. Notera att $D_f = (0, \infty)$

Vi har $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Funktionen är deriverbar i sin definitionsmängd och har därför inga singulära punkter och vi går därför vidare och undersöker kritiska punkter.

$$f'(x) = 2x - 1/x^2 = 0 \iff 2x = 1/x^2 \iff x^3 = 1/2 \iff x = 1/\sqrt[3]{2}$$

Vi undersöker tecknet av f' runt punkten och finner $f'(1/2) < 0$ och $f'(1) > 0$. Funktionsvärdet i den kritiska punkten ges av $f(1/\sqrt[3]{2}) = 3/2^{2/3}$. Vi konstruerar nedanstående tabell och kan dra slutsatsen att funktionen antar sitt minsta värde i $x = 1/\sqrt[3]{2}$.

x	0		$1/\sqrt[3]{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$3/2^{2/3}$	$\nearrow$	∞

Det kortaste avståndet till punkten ges nu av $d = \sqrt{f(1/\sqrt[3]{2})} = \sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$.

5. Undersök, med hjälp av kurvkonstruktion, hur många reella rötter ekvationen $\ln(x) + 2x - Cx = 0$ har för olika värden på konstanten C.

Vi löser ut konstanten C och får $C = \ln(x)/x + 2$. För att bestämma antalet reella rötter konstruerar vi kurvan $y = \ln(x)/x + 2$ och undersöker hur många skärningar den har med linjen $y = C$ för olika värden på C. Vi följer arbetsgången för kurvkonstruktion. Låt $f(x) = \ln(x)/x + 2$.

1. Bestäm definitionsmängd. Eftersom $\ln(x)$ endast är definierad för $x > 0$ så är funktionen f är endast definierad för $x > 0$. Vi har alltså att $D_f = \{x; x > 0\}$. Randpunkter för D_f är alltså 0.

2. Bestäm eventuella asymptoter. Vi undersöker vad som händer då $x \to 0^+$:

   $$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)/x + 2 = [t = 1/x] = \lim_{t\to\infty} t\ln(t^{-1}) + 2 = \lim_{t\to\infty} -t\ln(t) + 2 = -\infty$$

   Alltså har vi en lodrät asymptot i $x = 0$.

   Vi undersöker nu sneda asymptoter då $x \to \infty$:

   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} + 2/x = 0 + 0 = 0.$$

   Eftersom potensfunktionen dominerar logaritmen.

   $$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} + 2 = 0 + 2 = 2.$$

   Återigen eftersom potensfunktionen dominerar logaritmen. Alltså $y = kx + m = 0x + 2 = 2$ är en sned asymptot då $x \to \infty$.

3. Kritiska punkter. ($f'(x) = 0$)

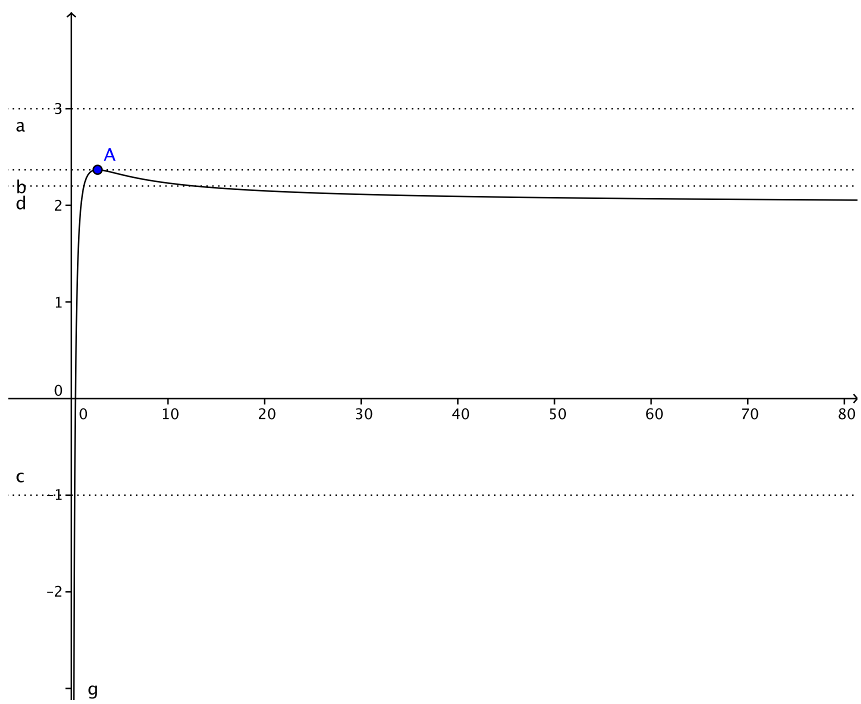
   $$f'(x) = \frac{1/x \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

   Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ runt denna punkt och finner att $f'(1) = 1$ och $f'(e^2) = -1/e^4$. Alltså teckenväxling $+, 0, -$ och vi har ett maximum. Funktionsvärdet i denna punkt är $f(e) = 1/e + 2$.

4. Teckentabell för $f'(x)$ och $f(x)$. Intressanta punkter är: $0, 1/e, \infty$.

x	0		e		∞
$f'(x)$		$+$	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e + 2$	$\searrow$	2

Med informationen i tabellen kan vi nu skissa grafen som ser ut som nedan och dra följande slutsats om antalet rötter: om $C > 1/e+2$ finns inga rötter, om $C = 1/e + 2$ finns en rot, om $2 < C < 1/e + 2$ finns två rötter, och om $C \leq 2$ finns en rot.



A
a
b
d
c
g
3
2
1
0
-1
-2
0
10
20
30
40
50
60
70
80

6. Låt funktionen $f(x) = \arctan((x-1)^2)$ med $D_f = \mathbb{R}$ vara given. Bestäm på vilka intervall funktionen är avtagande respektive växande, samt på vilka intervall funktionen är konvex respektive konkav.

För att bestämma var funktionen är avtagande/växande studerar vi derivatan:

$$f'(x) = \frac{1}{1+((x-1)^2)^2} \cdot 2(x-1) = \frac{2(x-1)}{1+(x-1)^4}$$

Vi ser att derivatan är noll i $x = 1$ och att $f'(x) < 0$ för $x < 1$ och att $f'(x) > 0$ för $x > 1$.

För att bestämma var funktionen är konvex/konkav studerar vi andraderivatan:

$$f''(x) = \frac{2(1+(x-1)^4) - 2(x-1)4(x-1)^3}{(1+(x-1)^4)^2} = \frac{2-6(x-1)^4}{(1+(x-1)^4)^2}$$

Vi söker först punkter där $f''(x) = 0$ (som kan vara inflexionspunkter):

$$f''(x) = \frac{2-6(x-1)^4}{(1+(x-1)^4)^2} \iff (x-1)^4 = 1/3 \iff x-1 = \pm 1/\sqrt[4]{3}$$
$$\iff x = 1 \pm 1/\sqrt[4]{3}$$

Vi studerar tecknet på f'' runt dessa punkter och finner att $f''(0) = -1$, $f''(1) = 2$ och $f''(2) = -1$. Andraderivatan skiftar alltså tecken runt punkterna och de är därför inflexionspunkter. Vi sammanfattar resultaten i följande teckentabell:

x		$1-1/\sqrt[4]{3}$		1		$1+1/\sqrt[4]{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$

Alltså är funktionen avtagande på $(-\infty, 1)$ och växande på $(1, \infty)$, samt konvex på $(1-1/\sqrt[4]{3}, 1+1/\sqrt[4]{3})$ och konkav på $(-\infty, 1-1/\sqrt[4]{3}) \cup (1+1/\sqrt[4]{3}, \infty)$.

7. Se kurslitteraturen.

8. Se kurslitteraturen.