Lösningar till tentamen för MVE425C

Lördagen den 21 mars, $8^{30} - 12^{30}$

1. Beräkna derivatan av följande funktioner:

(a) $\dfrac{1+x^2}{\sin x}$

$$D\left(\frac{1+x^2}{\sin x}\right) = \frac{D(1+x^2)\sin x - (1+x^2)D(\sin x)}{\sin^2 x} = \frac{2x\sin x - (1+x^2)\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{2x}{\sin x} - (1+x^2)\frac{\cot x}{\sin x}$$

(b) $e^{x^2+2x} - \sqrt{x}$

$$D\left(e^{x^2+2x} - \sqrt{x}\right) = e^{x^2+2x}D(x^2+2x) - D(\sqrt{x}) = (2x+2)e^{x^2+2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) $\dfrac{1}{\tan^2 x}$

$$D\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right) = D\left(\tan^{-2}(x)\right) = -2\tan^{-3}(x)D(\tan x) = \frac{-2\tan^{-3}(x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{-2\cos^3 x}{\cos^2 x \sin^3 x} = \frac{-2\cos x}{\sin^3 x}$$

2. Låt $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Bestäm derivatan $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Enligt derivatans definition har vi att

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+x+h} - \frac{1}{1+x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+x-(1+x+h)}{(1+x+h)(1+x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(1+x+h)(1+x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(1+x+h)(1+x)} = -\frac{1}{(1+x)^2}
\end{aligned}
$$

3. Funktionen $y = y(x)$ är implicit definierad enligt $y^2x + y + yx^2 = 1$. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(0;1)$.

Ekvationen för ekvationen i punkten $(0;1)$ ges av enpunktsformeln enligt

$$y - 1 = y'(0)(x - 0)$$

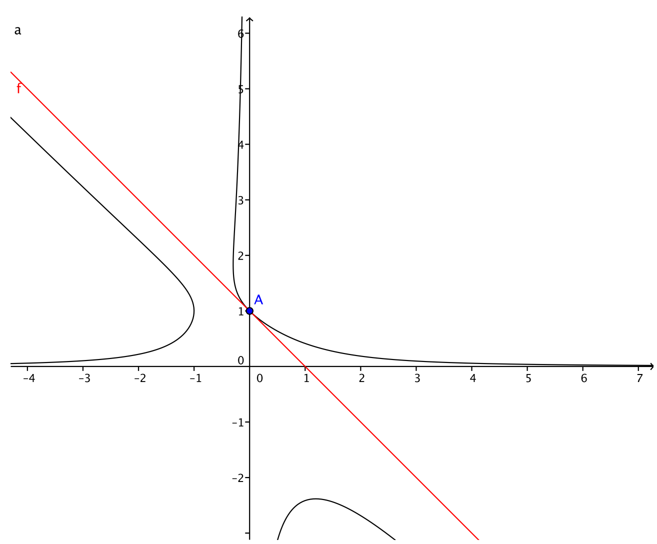
Vi måste alltså beräkna $y'(x)$ vilket vi gör genom att derivera uttrycket implicit.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(y^2x + y + yx^2\right) = \frac{d}{dx}(1) \\
&\frac{d}{dx}\left(y^2x\right) + y' + \frac{d}{dx}\left(yx^2\right) = 0 \\
&2yy'x + y^2 + y' + y'x^2 + 2xy = 0 \\
&y'(2yx + 1 + x^2) + y^2 + 2xy = 0 \\
&y' = -\frac{y^2 + 2xy}{2xy + 1 + x^2}
\end{aligned}$$

Insättning ger nu att $y'(0) = -1$. Tangentens ekvation kan därför skrivas

$$y - 1 = y'(0)(x - 0) \iff y - 1 = -x \iff y = -x + 1.$$

Figuren nedan visar lösningen grafiskt.



4. Låt $f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(2x)$. Bestäm definitionsmängd, eventuella lokala extrempunkter, asymptoter, samt skissa funktionens graf.

Vi följer arbetsgången för kurvkonstruktion:

1. Bestäm definitionsmängd. Vi vet att $\ln(x)$ bara är definierad för $x > 0$. För den första termen gäller att $x^2 + 1 > 0$ för alla x, men för den andra gäller att $2x > 0 \iff x > 0$. Alltså har vi att $D_f = \{x; x > 0\}$. Randpunkt för D_f är 0.

2. Bestäm eventuella asymptoter. Vi har en möjlig lodrät asymptot i $x = 0$. Vi skriver $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{2x}\right)$ och undersöker vad som händer då $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1+x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1/x + x}{2}\right) = \infty$$

   Eftersom $\frac{1/x+x}{2} \to \infty$ då $x \to 0^+$.Vi har alltså en lodrät asymptot i $x = 0$.

   Vi undersöker nu sneda asymptoter:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} - \frac{\ln(2x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x} - \frac{\ln(2)+\ln(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x) + \ln(1+1/x^2))}{x} - \frac{\ln(2)+\ln(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+1/x^2))}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = 0 + 0 - 0 - 0 = 0.$$

   Eftersom potensfunktionen dominerar logaritmen.

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} f(x) - 0x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1/x+x}{2}\right) = \infty$$

   Alltså existerar ingen sned asymptot då $x \to \infty$.

3. Kritiska punkter.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{2x} = \frac{2x^2 - (1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}$$

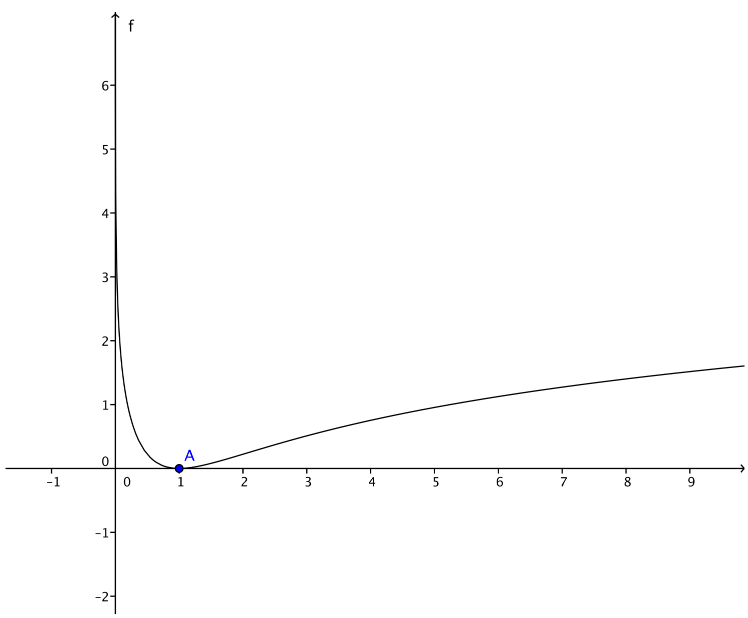
   Kritiska punkter ges av lösningar till $f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$. Men endast $x = 1$ ligger i D_f, alltså har vi kritisk punkt i $x = 1$.

   Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ runt $x = 1$. $f'(1/2) = -6/5 < 0$ och $f'(2) = 3/10 > 0$. Alltså har vi teckenväxlingen $-, 0, +$ runt $x = 1$ och därmed ett lokalt minimum.

4. Teckentabell för $f'(x)$ och $f(x)$. Intressanta punkter och gränsvärden är: $0^+, 1, \infty$. Vi använder informationen ovan och kompletterar med att $f(1) = -0$.

x	0^+		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Med informationen i tabellen kan vi nu skissa grafen som ser ut som nedan.



5. Undersök, med hjälp av kurvkonstruktion, hur många reella rötter ekvationen $x^3 - Cx^2 + 1 = 0$ har för olika värden på konstanten C.

Vi löser ut konstanten C och får $C = (x^3 + 1)/x^2$. För att bestämma antalet reella rötter konstruerar vi kurvan $y = (x^3 + 1)/x^2$ och undersöker hur många skärningar den har med linjen $y = C$ för olika värden på C. Vi följer arbetsgången för kurvkonstruktion. Låt $f(x) = (x^3 + 1)/x^2$.

1. Bestäm definitionsmängd. Funktionen f har nämnare $N(x) = x^2$. $N(x) = 0 \iff x = 0$. Alltså har vi att $D_f = \{x; x \neq 0\}$. Randpunkter för D_f är $x = 0$.

2. Bestäm eventuella asymptoter. Vi har en möjlig lodrät asymptot i $x = 0$. Nära denna beter sig funktionen enligt:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + 1}{x^2} = \infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + 1}{x^2} = \infty$$

   Vi har alltså en lodrät asymptot i $x = 0$.

   Vi undersöker nu sneda asymptoter:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x(x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3(1 + 1/x^3)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + 1/x^3}{1} = 1.$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x^2)}{x^2} =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

   Alltså $y = kx + m = 1x + 0 = x$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

3. Kritiska punkter. ($f'(x) = 0$)

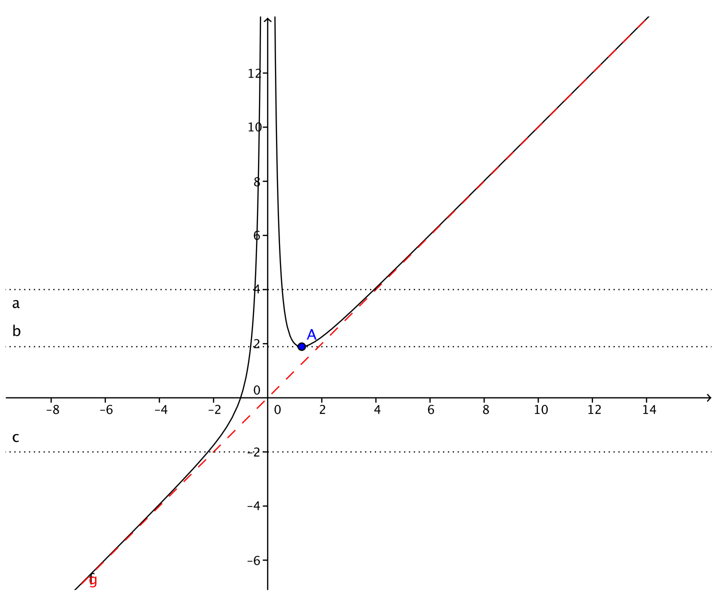
$$f'(x) = \frac{3x^2x^2 - 2x(x^3+1)}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3} = 0 \iff x = \sqrt[3]{2}$$

Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ runt denna punkt och finner att $f'(1) = -1$ och $f'(2) = 3/4$. Alltså teckenväxling $-, 0, +$ och vi har ett lokalt minimum. Funktionsvärdet i denna punkt är $f(\sqrt[3]{2}) = 3/2^{2/3}$.

4. Teckentabell för $f'(x)$ och $f(x)$. Intressanta punkter är: $-\infty, 0, \sqrt[3]{2}, \infty$. Vi kompletterar ovanstående med att $f'(-1) = 3$.

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		∞
$f'(x)$	1	$+$		$-$	0	$+$	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞ ∞	$\searrow$	$3/2^{2/3}$	$\nearrow$	∞

Med informationen i tabellen kan vi nu skissa grafen som ser ut som nedan och dra följande slutsats om antalet rötter: om $C > 3/2^{2/3}$ finns tre reella rötter, om $C = 3/2^{2/3}$ finns två reella rötter och om $C < 3/2^{2/3}$ finns en reell rot.



6. Bestäm största och minsta värde samt eventuella inflexionspunkter för $f(x) = e^{-x} \sin x$ med definitionsmängd $D_f = [0, 2\pi]$.

Inflexionspunkter är punkter där andraderivatan byter tecken. Största och minsta värde kan antas i randpunkter, kritiska punkter ($f'(x) = 0$) och singulära punkter. Eftersom funktionen är kontinuerlig existerar inga singulära punkter. I randpunkterna har vi $f(0) = f(2\pi) = 0$.

För att lösa uppgiften söker vi nollställen till $f'(x)$ och $f''(x)$ samt konstruerar en teckentabell för $f(x)$, $f'(x)$ och $f''(x)$.

$$f'(x) = e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(\cos x - \sin x) = 0 \iff \cos x = \sin x \iff \tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

Av dessa nollställen ligger $x = \pi/4$ och $x = 5\pi/4$ i D_f. Vi undersöker tecknet av $f'(x)$ kring dessa och finner att $f'(0) = 1 > 0$, $f'(\pi/2) = -e^{-\pi/2} < 0$ och $f'(\pi) = e^{-\pi} > 0$. Därmed har vi att $x = \frac{\pi}{4}$ har teckenväxling $+, 0, -$ (lokalt maximum) och $x = \frac{5\pi}{4}$ har teckenväxling $-, 0, +$ (lokalt minimum). Vi noterar att $f(\pi/4) = e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ och $f(5\pi/4) = -e^{-5\pi/4}/\sqrt{2}$.

$$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x} \cos x$$

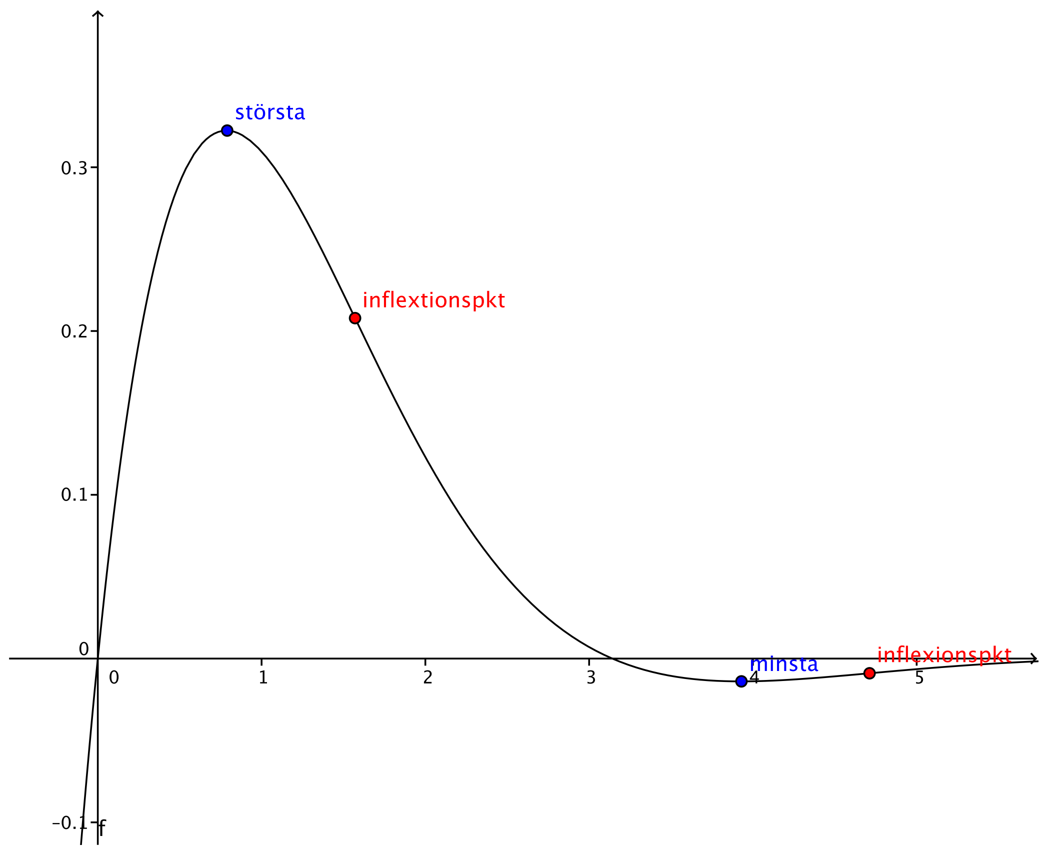
$$f''(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \pi/2 + n\pi$$

Av dessa nollställen ligger $x = \pi/2$ och $x = 3\pi/2$ i D_f. Vi undersöker tecknet av $f''(x)$ kring dessa och finner att $f''(0) = -2 < 0$, $f''(\pi) = 2e^{-\pi} > 0$ och $f''(2\pi) = -2e^{-2\pi} < 0$. Vi noterar att $f(\pi/2) = e^{-\pi/2}$ och $f(3\pi/2) = -e^{-3\pi/2}$.

Vi sammanfattar resultaten i nedanstående teckentabell:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0		$e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$		$e^{-\pi/2}$		$-e^{-5\pi/4}/\sqrt{2}$		$-e^{-3\pi/2}$		0

Från tabellen kan vi dra slutsatsen att funktionens största värde är $f(\pi/4) = e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ och minsta värde $f(5\pi/4) = -e^{-5\pi/4}/\sqrt{2}$. Funktionen har inflexionspunkter i $(\pi/2; e^{-\pi/2})$ och $(3\pi/2; -e^{-3\pi/2})$. Figuren nedan visar funktionen grafiskt.



största
0.3
inflextionspkt
0.2
0.1
0
0
1
2
3
minsta
4
inflexionspkt
5
-0.1
f

7. Se kurslitteraturen
8. Se kurslitteraturen