Tentamen i Matematik, del C, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425 C
Telefonvakt: Dawan Mustafa tel. 0739-900967
Datum: 8 april 2016
Tid för tentamen: 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga.
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

---

1. Beräkna derivatan av följande funktioner.

   (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (2p)

   Lösning: Kvotregeln ger att

   $$f'(x) = \frac{x\cos x + \sin x}{x^2}$$

   (b) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ (2p)

   Lösning: Kvotregeln och kedjeregeln ger att

   $$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - \ln(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(1-\ln(x^2+1))}{(x^2+1)^2}.$$

   (c) $f(x) = \cos^3(x^2+x)$ (2p)

   Lösning: Kedjeregeln ger att

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos^2(x^2+x) \cdot D[\cos(x^2+x)] \\ &= 3\cos^2(x^2+x) \cdot (-\sin(x^2+x)) \cdot (2x+1) \\ &= -3\cos^2(x^2+x)\sin(x^2+x)(2x+1). \end{aligned}$$

2. Låt $f(x) = x^2 + 2\ln x$. Bestäm D_f. Bestäm a sådant att $f'(a) = 5$. (5p)

   Lösning: Det gäller att $D_f = \{x : x > 0\}$, och

   $$f'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2+2}{x}.$$

Lösningarna till ekvationen $f'(a) = 5$ ges av

$$\frac{2a^2+2}{a} = 5.$$

Omskrivning ger att

$$2a^2 + 2 - 5a = 0 \Leftrightarrow a^2 - \frac{5}{2}a + 1 = 0.$$

Lösningarna till den sista adragradsekvationen ges av $a_1 = 2$ och $a_2 = \frac{1}{2}$.

3. Konstruera kurvan $y = \dfrac{1}{x^2-2}$. (8p)

Lösning: Sätt $f(x) = y$. Vi går igenom de fem stegen som gäller för kurvkonstruktion enligt föreläsningsanteckningarna.

1. $D_f = \{x : x \neq \pm\sqrt{2}\}$.
2. Lodräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x) = -\infty \text{ och } \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) = \infty.$$

Linjenerna $x = \sqrt{2}$ och $x = -\sqrt{2}$ är lodräta asymptoter.

Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Således är linjen $y = 0$ en vågrät asymptot.

Sneda asymptoter:
Inga.

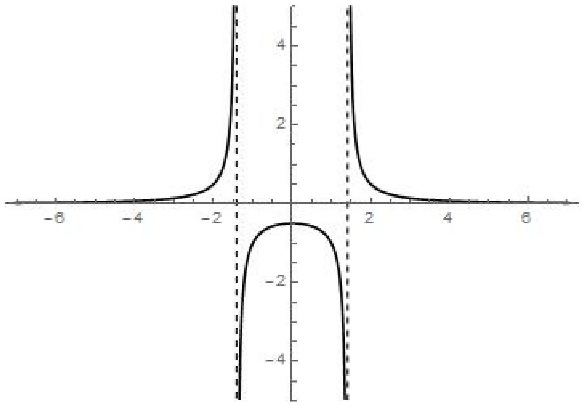
3.
$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$$

Kritiska punkter: $x = 0$.
Singulära punkter: $\pm\sqrt{2} \notin D_f$. Inga.

4. Teckschema för $f'(x)$:

x	$(-\infty)$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		(∞)
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\infty/-\infty$	$\nearrow$	-1/2	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	0

5. Rita en skiss av kurvan:



4. Betrakta funktionen $f(x) = x^4 - 3x^2$, definierad på $D_f = [0, 2)$. Bestäm största och minsta värde för funktionen. (7p)

Lösning:
Randpunkter: $f(0) = 1$. Notera att $2 \notin D_f$, men det gäller att $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.
Singulära punkter: Inga.
Kritiska punkter:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}},\ x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \notin D_f.$$

Det gäller att $f(0) = 0$ och $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$.
Nu undersöker vi derivatans tecken med hjälp av teckenschema:

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

Funktionens minsta värde är $-\frac{9}{4}$. Undersökningen av randpunkter visar att funktionen saknar största värde i $D_f = [0, 2)$.

5. Låt $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3}$. Skissa funktionens graf. Bestäm alla inflektionspunkter och på vilka intervall f är konkav respektive konvex. (10p)

Lösning: Vi börjar med att skissa funktionen graf. Vi går igenom de fem stegen som gäller för kurvkonstruktion enligt föreläsningsanteckningarna.

1. $D_f = \mathbb{R}$.

2. Lodräta asymptoter: Inga

   Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

   Linjen $y = 0$ är vågrät asymptot

   Sneda asymptoter: Inga

3.

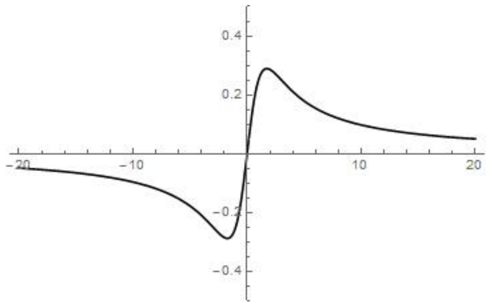
$$f'(x) = \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}$$

   Kritiska punkter: $x = \pm\sqrt{3}$.
   Singulära punkter: Inga.

4. Teckschema för $f'(x)$:

x	$(-\infty)$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\searrow$	0

5. Rita en skiss av funktionens graf:



För att bestämma funktionens inflektionspunkter beräknar vi $f''(x)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-2x(x^2+3)^2 - 4x(3-x^2)(x^2+3)}{(x^2+3)^4} \\
&= \frac{2x(x^2+3)(-x^2-3-6+2x^2)}{(x^2+3)^4} \\
&= \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}.
\end{aligned}
$$

Ekvationen $f''(x) = 0$ har lösningarna $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, och $x_3 = 3$. Vi gör nu teckenschema för $f''(x)$:

x		-3		0		3	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Teckenschemat visar att

- $f(x)$ har har inflektionspunkter i $x = -3, 0, 3$,
- $f(x)$ är konvex i intervallen $(-3, 0)$ och $(3, \infty)$,
- $f(x)$ är konkav i intervallen $(-\infty, -3)$ och $(0, 3)$.

6. Låt $f(x) = \sqrt{x+1}$. Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition. (5p)

Lösning: Derivatans definition ger att

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.
\end{aligned}
$$

7. Visa att $D(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. (4p)

8. Visa med hjälp av derivatans definition att $D(\sin x) = \cos x$. (5p)