Tentamen i Matematik, del C, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425 C
Examinator : Thomas Wernstål
Telefonvakt: Thomas Wernstål, ankn 3557
Datum: 18 augusti 2016
Tid för tentamen: 08.30 - 12.00
Hjälpmedel: Inga.
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

---

1. Beräkna derivatan av följande funktioner.

   (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$ (2p)

   Lösning: Kvotregeln ger att

$$f'(x) = \frac{\cos x\ e^x - \sin x\ e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x}$ (2p)

   Lösning: Kvotregeln och sedan förenkling ger att

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+x) - (x^2+1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{-(x^2+1)^2}{(x^3+x)^2}$$

   (c) $f(x) = \sin(e^{x^2})$ (2p)

   Lösning: Kedjeregeln två gånger ger att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(e^{x^2}) \cdot\ D[e^{x^2}] \\ &= \cos(e^{x^2})\ \cdot e^{x^2}\ \cdot 2x \\ &= 2xe^{x^2}\cos(e^{x^2}) \end{aligned}$$

2. Funktionen $y = y(x)$ är implicit definierad enligt ekvationen

$$x^2y + y^2 + y = 14.$$

Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(2, 2)$. (7p)

Lösning: Notera att punkten $(2, 2)$ ligger på kurvan. Implicit derivering ger att

$$\frac{d}{dx}(x^2y + y^2 + y) = \frac{d}{dx}(14).$$

Det gäller att

$$\begin{aligned} & 2x\ y + x^2\ y' + 2\ y\ y' + y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y'(x^2 + 2y + 1) + 2xy = 0 \\ \Rightarrow\ & y' = \frac{-2xy}{x^2 + 2y + 1}. \end{aligned}$$

Tangentens lutning i punkten $(2, 2)$ ges av

$$y'(2) = -\frac{8}{9}.$$

Tangentens ekavation ges då av

$$\frac{y-2}{x-2} = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{34}{9}.$$

3. Konstruera kurvan $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$. (8p)

Lösning: Sätt $f(x) = y$. Vi går igenom de fem stegen som gäller för kurvkonstruktion enligt föreläsningsanteckningarna.

1. $D_f = \{x : x \neq 0, 1\}$.
2. **Lodräta asymptoter**:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \text{ och } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Linjerna $x = 0$ och $x = 1$ är en lodräta asymptoter.

Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \text{ och } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Linjen $y = 0$ är vågrät asymptot.

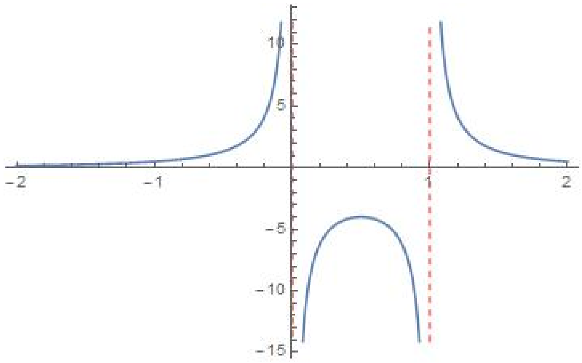
3.
$$f'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$$

Kritiska punkter: $x = \frac{1}{2}$.
Singulära punkter: Inga.

4. Teckschema för $f'(x)$:

x	$(-\infty)$		0		$1/2$		1		(∞)
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\infty/-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	0

5. Rita en skiss av kurvan:



4. Betrakta funktionen $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}$. Bestäm funktionens största och minsta värde. Bestäm också alla inflektionspunkter och på vilka intervall funktionen är konvex respektive konkav. (8p)

Lösning:
Randpunkter: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Singulära punkter: Inga.
Kritiska punkter:
$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}(1-x)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Det gäller att $f(1) = \sqrt{e}$.
Nu undersöker vi derivatans tecken med hjälp av teckenschema:

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$

Funktionens största värde är $\sqrt{e}$ och minsta värde saknas.
Inflektionspunkter:

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}\left((1-x)^2 - 1\right) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}x(x-2)$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Med hjälp teckenschema för andraderivatan ser man att $x = 0, 1$ är inflektionspunkter, och att funktionen är konvex på intervalllen $(-\infty, 0)$ och $(2, \infty)$, respektive konkav på intervallet $(0, 2)$.

5. Undersök, med hjälp av kurvkonstruktion, hur många reella rötter ekvationen $x^3 - Cx + C = 0$ har för olika värden på konstanten C. (8p)

Lösning: Omskrivning ger att

$$x^3 - Cx + C = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x-1} = C$$

då $x \neq 1$. Sätt $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Vi konstruerar kurvan till $f(x)$.

1. $D_f = \{x : x \neq 1\}$.
2. **Lodräta asymptoter**:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot.

Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty.$$

Vågräta asymptoter saknas.
Sneda asymptoter:

En enkel räkning visar att $f(x)$ har inga sneda asymptoter.

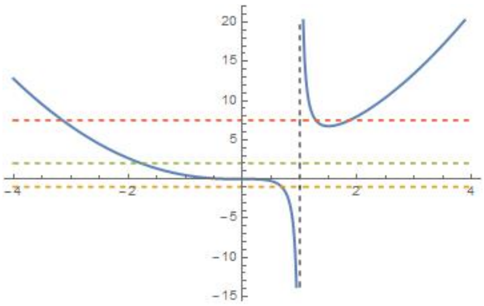
3.
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

Kritiska punkter: $x = 0$ och $x = \frac{3}{2}$.
Singulära punkter: $1 \notin D_f$. Inga.

4. Teckschema för $f'(x)$:

x	$(-\infty)$		0		1		$\frac{3}{2}$		(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	∞

5. Rita en skiss av kurvan tillsamman med linjen $y = C$ för olika värden på C:



Antal reella rötter:

$C < \frac{27}{4}$	1 rot
$C = \frac{27}{4}$	2 rötter
$C > \frac{27}{4}$	3 rötter.

6. Låt $f(x) = |x|$. Bestäm om $f(x)$ är deriverbar i $x = 0$. (5p)

Lösning: Vi beräknar höger- och vänsterderivation av funktionen i $x = 0$. Det gäller att

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \end{aligned}$$

Eftersom $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ är $f(x)$ ej deriverbar i $x = 0$.

7. Formulera och bevisa satsen om derivatan av en produkt. (4p)

8. Formulera och bevisa satsen om derivatans nollställen. (4p)