Basåret, del C, 17 mars 2018
Kortfattade lösningar

1. (a)

$$\begin{aligned} De^x \cos x &= (De^x)\cos x + e^x D\cos x \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)\ , \end{aligned}$$

(b)

$$D\ln\left(\left(1+x^2\right)^2\right) = D(2\ln(1+x^2)) = 2\frac{1}{1+x^2}D(1+x^2) = \frac{4x}{1+x^2}\ ,$$

(c)

$$\begin{aligned} D\frac{1}{x^2e^{2x}} &= Dx^{-2}e^{-2x} = -2x^{-3}e^{-2x} + x^{-2}e^{-2x}(-2) \\ &= -2\frac{1}{e^{2x}}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right) = -2\frac{1+x}{x^3e^{2x}}\ . \end{aligned}$$

2. Vi har $y'(x) = De^{\sin x} = e^{\sin x}D\sin x = \cos x\, e^{\sin x}$ och alltså har tangenten riktningskoefficienten $y'(\pi) = -1e^0 = -1$. Eftersom $y(\pi) = e^0 = 1$ blir linjens ekvation

$$\frac{y-1}{x-\pi} = -1, y-1 = \pi - x \text{ och } x+y = \pi+1\ .$$

3. Funktionen $f(x) = x^3-12|x|+1$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-1,3]$ och har alltså ett största och ett minsta värde.

   De kan antas i intervallets ändpunkter, i punkter där derivatan är 0 och i punkter där funktionen inte är deriverbar.

   En punkt där derivatan kanske inte existerar är $x = 0$. ($f(x)$ är *inte* deriverbar då $x = 0$ men vi behöver inte kolla det.)

   Om $x > 0$ är $f(x) = x^3 - 12x + 1$ och $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4)$. Den enda positiva roten till $f'(x) = 0$ är $x = 2$ och den ligger i $[-1,3]$.

   Om $x < 0$ är $f(x) = x^3 + 12x + 1$ och $f'(x) = 3x^2 + 12 = 3(x^2+4)$. Eftersom $x^2 + 4 \geq 4$ saknar ekvationen lösningar.

   Så det finns bara 4 punkter, nämligen -1, 0, 2 och 3, där extremvärdena kan antas. Vi har $f(-1) = -12$, $f(0) = 1$, $f(2) = -15$ och $f(3) = -8$.

   Så funktionen har minsta värde $f(2) = -15$ och största värde $f(0) = 1$.

4. Funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ är definierad då $x \neq 1$.

   $f(x)$ har en lodrät asymptot $x = 1$. Vi observerar också att

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty \text{ och } \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty \ .$$

   För att studera $f(x)$ för stora x dividerar vi.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{x(x-1) + 2x - 1}{x - 1} &= x + \frac{2x - 1}{x - 1} \\ &= x + \frac{2(x-1) + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1} \ . \end{aligned}$$

   Så $f(x) - (x + 2) \to 0, x \to \pm\infty$ och alltså är $y = x + 2$ en sned asymptot. Vi ser också att $f(x)$ ligger ovanför asymptoten då $x \to +\infty$ och under då $x \to -\infty$.

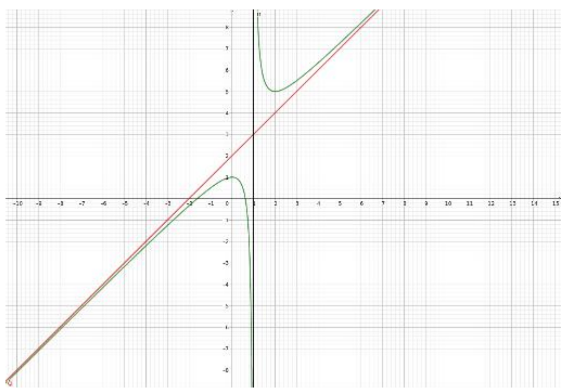
   Derivering ger

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1) - (x^2 + x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} \ .$$

   Vi får följande teckentabell.

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+\ +$	0	$-\ -$	ej def.	$-\ -$	0	$+\ +$
$f(x)$	$\nearrow$	1 max	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	5 min	$\nearrow$

   Skiss:



5. När $x = 1$ ger ekvationen att

$$y(1)^2 - y(1) = 0 \ ,$$

med lösningarna $y(1) = 1$ och $y(1) = 0$. Men eftersom vi vet att $y(1) > 0$, gäller alltså $y(1) = 1$.

Deriverar vi

$$(x-1)y(x)^3 + y(x)^2 - xy(x) = 0 \ ,$$

ger kedjeregeln

$$y(x)^3 + 3(x-1)y(x)^2y'(x) + 2y(x)y'(x) - y(x) - xy'(x) = 0 \ .$$

Så när $x = 1$ gäller

$$y(1)^3 + 2y(1)y'(1) - y(1) - y'(1) = 0 \ ,$$

och eftersom $y(1) = 1$,

$$1 + 2y'(1) - 1 - y'(1) = 0 \text{ så } y'(1) = 0 \ .$$

6. Eftersom $e \neq 0$ har ekvationen aldrig roten $x = 1$. När $x \neq 1$ kan ekvationen skrivas

$$f(x) = C \text{ där } f(x) = \frac{e^x}{x-1} \ .$$

Vi har

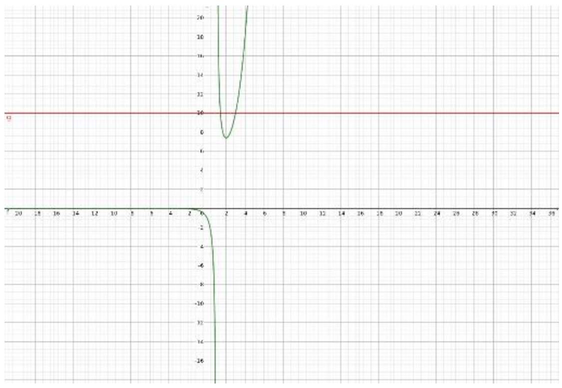
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = e^x \frac{x-2}{(x-1)^2} \ .$$

Vi får följande teckentabell:

x		1		2	
$f'(x)$	$--$	ej def.	$--$	0	$++$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	e^2 min	$\nearrow$

Vi observerar också, att $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Det sista påståendet följer eftersom e^x växer mycket snabbare än x då $x \to +\infty$.

Skiss:



Vi ser att vi har

$$\begin{aligned}&\text{En rot då } C < 0,\\&\text{ingen rot då } 0 \leq x < e^2,\\&\text{en rot då } C = e^2, \text{ och}\\&\text{två rötter då } x > e^2.\end{aligned}$$

7&8. Se kurslitteraturen.