Lösningar för tenta i MVE425 Matematik, del C 2019-03-23 kl. 08:30–12:30

1. (a) Produktregeln ger

$$D[x^2 \ln x] = D[x^2] \ln x + x^2 D[\ln x] = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

Svar: $D[x^2 \ln x] = 2x \ln x + x.$

(b) Vi har en sammansatt funktion, så vi använder kedjeregeln:

$$D[(1+e^{2x})^2] = 2(1+e^{2x})D[1+e^{2x}] = 2(1+e^{2x})e^{2x}D[2x] = 2(1+e^{2x})e^{2x} \cdot 2.$$

Svar: $D[(1+e^{2x})^2] = 4(1+e^{2x})e^{2x}.$

(c) Kvotregeln ger

$$D\left[\frac{\sin(3x)}{1+x^3}\right] = \frac{D[\sin(3x)](1+x^3) - \sin(3x)D[1+x^3]}{(1+x^3)^2} = \\ = \frac{3\cos(3x)(1+x^3) - \sin(3x) \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}.$$

Svar: $D\left[\dfrac{\sin(3x)}{1+x^3}\right] = \dfrac{3(1+x^3)\cos(3x) - 3x^2 \sin(3x)}{(1+x^3)^2}.$

2. Låt $f(x) = x \cos x$. Till x-värdet $\frac{\pi}{2}$ svarar y-värdet $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$, dvs tangenten skall gå genom punkten $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Tangentens riktningskoefficient ges av $k = f'(\frac{\pi}{2})$. Vi bestämmer därför derivatan

$$f'(x) = D[x] \cos x + xD[\cos x] = 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x,$$

och sätter in $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \frac{\pi}{2} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Enpunktsformeln ger oss nu tangentens ekvation i den aktuella punkten:

$$y - 0 = k\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{\pi}{2}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big).$$

Svar: Tangentens ekvation är $y = -\dfrac{\pi}{2}\Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big).$

3. (a) Vi har en kontinuerlig funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall, så det finns garanterat både ett största och ett minsta värde. Dessa finns i *kritiska punkter*, i *randpunkter*, eller i *singulära punkter*.

Kritiska punkter: Derivatan är

$$f'(x) = \frac{D[\ln x]x - \ln x D[x]}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

så enda kritiska punkten ges av $1 - \ln x = 0$, dvs $x = e$.

Randpunkter: Intervallets ändar, $x = 1$ och $x = e^2$.

Singulära punkter: Saknas, eftersom derivatan är definierad på hela D_f.

Insättning ger nu $f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$, $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$, och $f(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{e^2} = \frac{2}{e^2}$. Efterom $f(e^2) = \frac{2}{e^2} < \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} = f(e)$ är största värdet $f(e) = \frac{1}{e}$ och minsta värdet $f(1) = 0$.

Svar: Största värdet är $f(e) = \frac{1}{e}$ och minsta värdet är $f(1) = 0$.

(b) I inflexionspunkter växlar funktionen från att vara konkav till att vara konvex, eller tvärtom. Ändpunkterna kan alltså inte vara inflexionspunkter, och eftersom andraderivatan

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

är definierad för alla $x \in (1, e^2)$ kan vi använda satsen som kopplar andraderivatan till konvexitet/konkavitet.

Vi får

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 + 2\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}},$$

dvs $x = e^{\frac{3}{2}}$ är en *möjlig* inflexionspunkt. För att $x = e^{\frac{3}{2}}$ faktiskt skall vara en inflexionspunkt måste $f''(x)$ byta tecken där, vilket vi lätt ser att den gör om vi stoppar in x-värden på vardera sidan, och vi får $f''(x) < 0$ om $x < e^{\frac{3}{2}}$ och $f''(x) > 0$ om $x > e^{\frac{3}{2}}$.

Slutsatsen blir att f är konkav på $[1, e^{\frac{3}{2}}]$, konvex på $[e^{\frac{3}{2}}, e^2]$, och att $x = e^{\frac{3}{2}}$ är den enda inflexionspunkten.

Svar: Funktionen f är konkav på $[1, e^{\frac{3}{2}}]$, konvex på $[e^{\frac{3}{2}}, e^2]$, och f har en inflexionspunkt i $x = e^{\frac{3}{2}}$.

4. Vi börjar med att undersöka funktionens definitionsmängd, som innehåller alla reella tal där nämnaren inte är noll. Nämnarens nollställen ges av

$$4x^2 + 4x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2},$$

dvs $x = -2$ och $x = 1$. Här *kanske* det finns lodräta asymptoter (vi undersöker strax).

Sneda asymptoter: Funktionen är en rationell funktion, och eftersom gradtalet i täljaren är högst ett högre än gradtalet i nämnaren kommer funktionen att ha en (gemensam) sned asymptot då $x \to \pm\infty$, och den ges av kvotpolynomet vid polynomdivision. Utför vi polynomdivisionen blir kvotpolynomet $q(x) = \frac{x-1}{4}$ och restpolynomet $r(x) = 2x - 2$. Alltså är $y = \frac{x-1}{4}$ en sned asymptot då $x \to \pm\infty$, och polynomdivisionen förenklar funktionen till

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{4x^2 + 4x - 8} = \frac{x-1}{4} + \frac{2x - 2}{4x^2 + 4x - 8}.$$

Lodräta asymptoter: Enda möjligheterna är $x = -2$ och $x = 1$, och för att undersöka gränsvärdena för dessa värden underlättar det om vi först faktoriserar täljare och nämnare (vi vet redan nämnarens nollställen):

$$f(x) = \frac{x-1}{4} + \frac{2(x-1)}{4(x+2)(x-1)} = \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

De relevanta gränsvärdena blir

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2(x+2)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2(x+2)} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{6},$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{6}.$$

Alltså är $x=-2$ en lodrät asymptot, medan $x=1$ inte är det.

Kritiska punkter: Vi deriverar $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\Big[\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2(x+2)}\Big] = \\ &= D\Big[\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2}(x+2)^{-1}\Big] = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x+2)^{-2}. \end{aligned}$$

De kritiska punkterna ges av

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x+2)^{-2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - 2(x+2)^{-2} = 0 \quad\Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2 - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x+2 = \pm\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = -2 \pm \sqrt{2}.$$

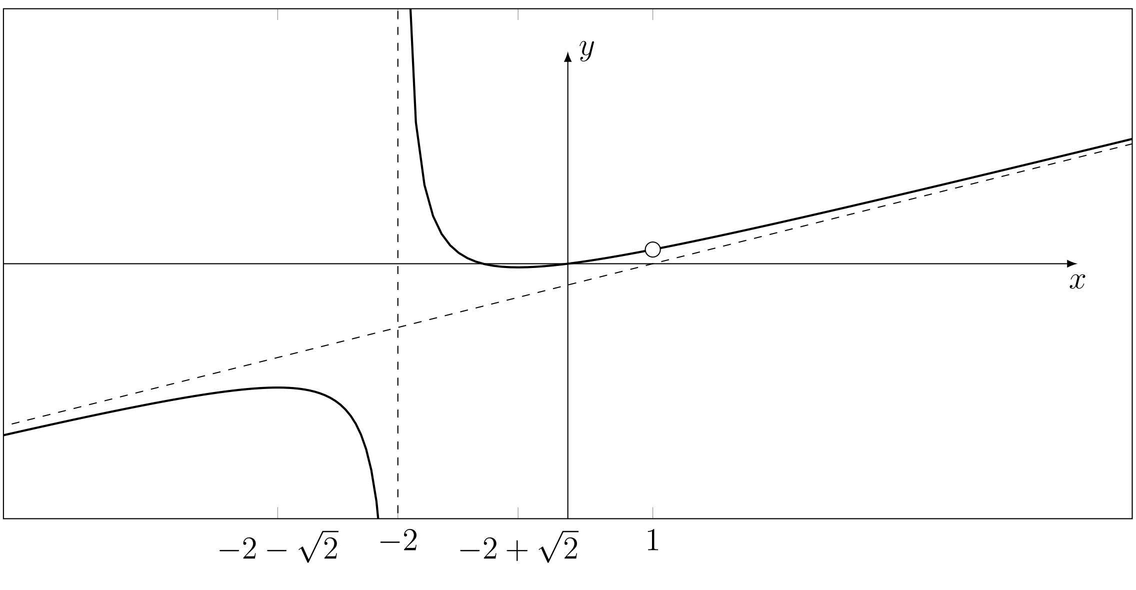
Randpunkter: Saknas, och eftersom vi har en sned asymptot behöver vi inte räkna några gränsvärden här.

Singulära punkter: Saknas, eftersom $f'(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$.

Vi kan nu göra upp följande teckentabell:

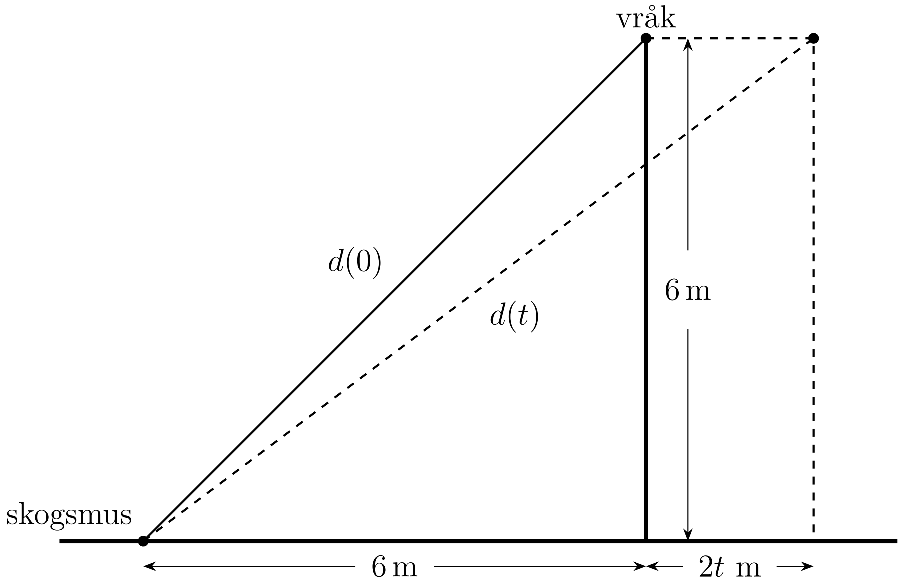
x	$(-\infty)$		$-2-\sqrt{2}$		-2^-	-2^+		$-2+\sqrt{2}$		1		(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	odef.	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$(-\infty)$	(∞)	$\searrow$	$-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	odef.	$\nearrow$	(∞)

Vi skisserar slutligen kurvan:



Svar: Kurvan har en sned asymptot $y = \frac{x-1}{4}$ då $x \to \pm\infty$ och en lodrät asymptot $x = -2$. Det finns ett lokalt maximum $f(-2-\sqrt{2}) = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ och ett lokalt minimum $f(-2+\sqrt{2}) = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Vi gör en skiss för att klargöra situationen:



För att förenkla notationen räknar vi enhetslöst i resten av uppgiften.

Antag att skogsmusen befinner sig i origo. Låt $x(t) = 6+2t$ vara vråkens x-koordinat vid tiden t efter att den börjat flyga, och låt $d(t)$ vara avståndet mellan skogsmusen och vråken vid tiden t.

Det som efterfrågas är förändringshastigheten för avståndet vid tiden $t = 1$, dvs vi skall bestämma $d'(1)$.

Med hjälp av Pythagoras sats får vi

$$d(t)^2 = 6^2 + x(t)^2 = 36 + (6+2t)^2,$$

och implicit derivering (med avseende på t) ger sedan

$$\begin{aligned} D[d(t)^2] &= D[36 + (6+2t)^2] \quad \Leftrightarrow \\ 2d(t)d'(t) &= 2(6+2t) \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \\ d'(t) &= \frac{2(6+2t)}{d(t)}. \end{aligned}$$

(Det går naturligtvis även att lösa ut $d(t)$ och derivera som vanligt, men det blir lite besvärligare räkningar.)

Eftersom $d(1) = \sqrt{36 + (6+2)^2} = 10$ blir nu $d'(1) = \dfrac{16}{10} = 1.6$. (Eftersom $d'(1)$ är positiv växer avståndet.)

Svar: Avståndet växer med 1.6 m/s

6. Om $x^2 - 5 = 0$ har ekvationen ingen lösning för något C, så vi kan utan vidare lösa ut C och få

$$C = \frac{e^{-x^2}}{5 - x^2}.$$

Genom att skissera kurvan till funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{5-x^2} = \frac{e^{-x^2}}{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)}$$

kan vi se hur många gånger varje funktionsvärde antas, dvs hur många x som ger ett visst C.

Funktionen f är definierad för alla $x \neq \pm\sqrt{5}$, så dessa skulle kunna vara lodräta asymptoter. Detta kontrollerar vi genom att beräkna

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}^-} \frac{\overbrace{e^{-x^2}}^{>0}}{\underbrace{(\sqrt{5}+x)}_{<0}\underbrace{(\sqrt{5}-x)}_{>0}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}^+} \frac{\overbrace{e^{-x^2}}^{>0}}{\underbrace{(\sqrt{5}+x)}_{>0}\underbrace{(\sqrt{5}-x)}_{>0}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^-} \frac{\overbrace{e^{-x^2}}^{>0}}{\underbrace{(\sqrt{5}+x)}_{>0}\underbrace{(\sqrt{5}-x)}_{>0}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^+} \frac{\overbrace{e^{-x^2}}^{>0}}{\underbrace{(\sqrt{5}+x)}_{>0}\underbrace{(\sqrt{5}-x)}_{<0}} = -\infty.$$

Detta visar att $x = \pm\sqrt{5}$ är lodräta asymptoter.

Eftersom $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ är $y = 0$ vågrät (sned) asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to \infty$.

Vi söker nu extrempunkter. Derivering med kvotregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x^2}(-2x)(5-x^2) - e^{-x^2}\cdot 2x}{(5-x^2)^2} = \\ &= 2xe^{-x^2} \cdot \frac{(-1)(5-x^2)-1}{(5-x^2)^2} = 2xe^{-x^2} \cdot \frac{x^2-4}{(5-x^2)^2}, \end{aligned}$$

så de *kritiska punkterna* är $x = 0$ och $x = \pm 2$.

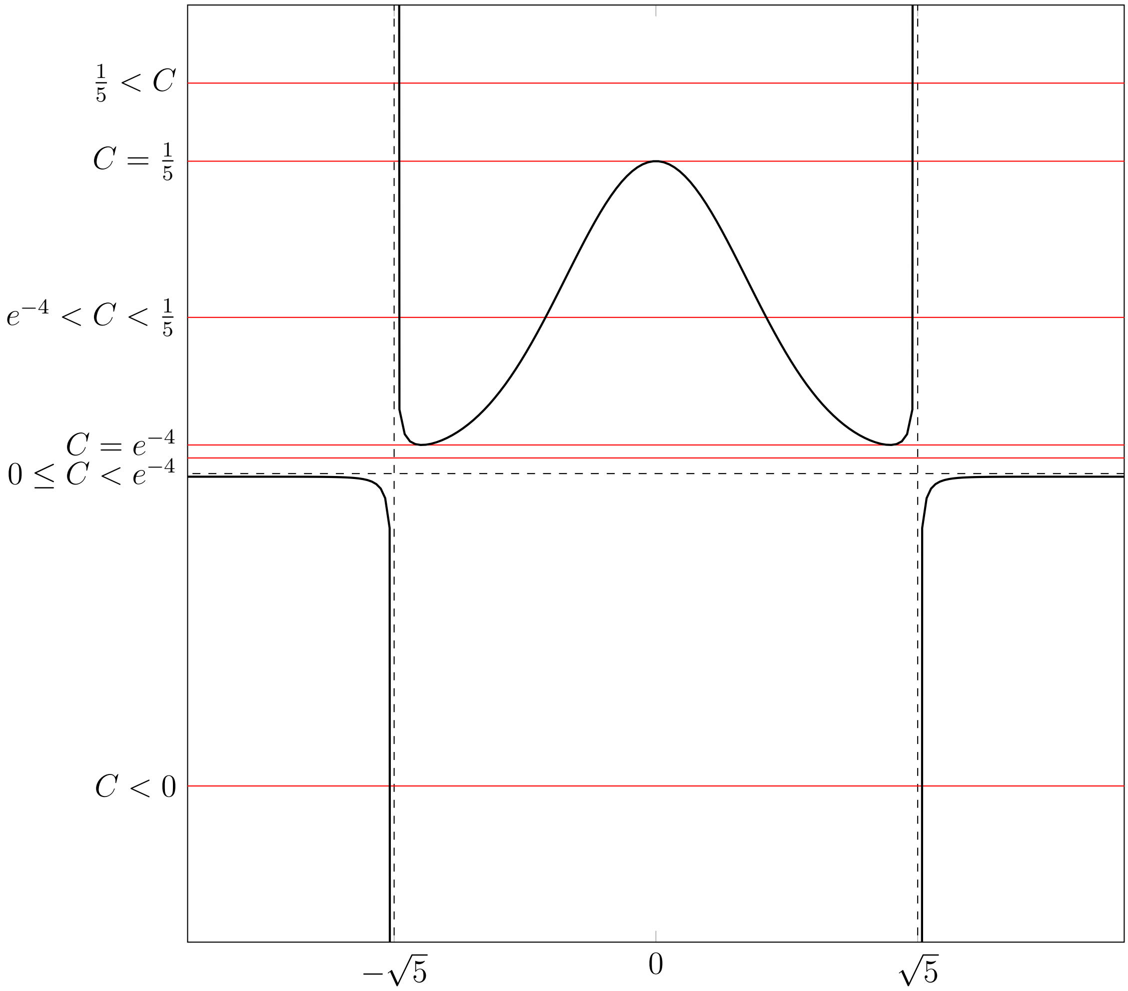
Randpunkter saknas, men eftersom vi har asymptoten $y = 0$ vet vi hur funktionen uppför sig för stora positiva och negativa x.

Singulära punkter saknas, eftersom f är deriverbar på hela sin definitionsmängd.

Genom att undersöka derivatan mellan alla intressanta punkter får vi teckentabellen:

x	$(-\infty)$		$-\sqrt{5}^-$	$-\sqrt{5}^+$		-2		0		2		$\sqrt{5}^-$	$\sqrt{5}^+$		(∞)
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	(∞)	(∞)	$+$	
$f(x)$	(0^-)	$\searrow$	$(-\infty)$	(∞)	$\searrow$	e^{-4}	$\nearrow$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$	e^{-4}	$\nearrow$	(∞)	$(-\infty)$	$\nearrow$	(0^-)

Vi skisserar kurvan:



Svar: Det gäller att

- då $C < 0$ har ekvationen två lösningar,
- då $0 \leq C < e^{-4}$ saknar ekvationen lösningar,
- då $C = e^{-4}$ har ekvationen två lösningar,
- då $e^{-4} < C < \frac{1}{5}$ har ekvationen fyra lösningar,
- då $C = \frac{1}{5}$ har ekvationen tre lösningar, och
- då $\frac{1}{5} < C$ har ekvationen två lösningar.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 3.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 2.