1. (a) Produktregeln ger

$$\begin{aligned} D[e^{-x}(\cos x + \sin x)] &= D[e^{-x}](\cos x + \sin x) + e^{-x} D[\cos x + \sin x] = \\ &= -e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \\ &= -2e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

Svar: $D[e^{-x}(\cos x + \sin x)] = -2e^{-x} \sin x$.

(b) Vi har en sammansatt funktion, så vi använder kedjeregeln:

$$D\Big[\sqrt{\sin(2x)}\Big] = \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x)}} \cdot D[\sin(2x)] = \frac{2\cos(2x)}{2\sqrt{\sin(2x)}} = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}.$$

Svar: $D\Big[\sqrt{\sin(2x)}\Big] = \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$.

(c) Kvotregeln ger

$$\begin{aligned} D\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\right] &= \frac{D[\ln(1+x^2)](1+x^2) - \ln(1+x^2) D[1+x^2]}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot (1+x^2) - \ln(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2x - \ln(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1 - \ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Svar: $D\left[\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\right] = \dfrac{2x(1 - \ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2}$.

2. Låt $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$. Till x-värdet $\ln 2$ svarar y-värdet

$$f(\ln 2) = \ln(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) = \ln\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{5}{2} = \ln 5 - \ln 2,$$

dvs tangenten skall gå genom punkten $(\ln 2, \ln 5 - \ln 2)$.

Tangentens riktningskoefficient ges av $k = f'(\ln 2)$. Vi bestämmer därför derivatan

$$f'(x) = D[\ln(e^x + e^{-x})] = \frac{1}{e^x + e^{-x}} D[e^x + e^{-x}] = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

och sätter in $x = \ln 2$:

$$f'(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}.$$

Enpunktsformeln ger oss nu tangentens ekvation i den aktuella punkten:

$$y - (\ln 5 - \ln 2) = k(x - \ln 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln 5 - \ln 2 + \frac{3}{5}(x - \ln 2).$$

Svar: Tangentens ekvation är $y = \ln 5 - \dfrac{8}{5}\ln 2 + \dfrac{3}{5}x$.

3. (a) Vi har en kontinuerlig funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall, så det finns garanterat både ett största och ett minsta värde. Dessa finns i *kritiska punkter*, i *randpunkter*, eller i *singulära punkter*.

Eftersom funktionen innehåller ett absolutbelopp delar vi upp i två fall:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 2 & \text{om } x \geq 0 \\ x^2 - 12x + 2 & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Kritiska punkter: Då $x \neq 0$ är derivatan

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{om } x > 0 \\ 2x - 12 & \text{om } x < 0, \end{cases}$$

och saknar alltså nollställen (både $x = -3$ och $x = 6$ ligger på fel sida brytpunkten, och $x = 6$ finns inte ens i D_f).

Eftersom $\lim_{x\to 0-} f'(x) = -12 \neq \lim_{x\to 0+} f'(x) = 6$ är f inte deriverbar i $x = 0$.

Randpunkter: Intervallets ändar, $x = -4$ och $x = 2$.

Singulära punkter: Vi såg att $x = 0$ är en singulär punkt (knappast förvånande, eftersom det är brytpunkten för absolutbeloppet).

Insättning ger nu $f(-4) = 66$, $f(0) = 2$, och $f(2) = 18$.

Efterom $f(0) = 2 < f(2) = 18 < f(-4) = 66$ är största värdet $f(-4) = 66$ och minsta värdet $f(0) = 2$.

Svar: Största värdet är $f(-4) = 66$ och minsta värdet är $f(0) = 2$.

(b) I inflexionspunkter växlar funktionen från att vara konkav till att vara konvex, eller tvärtom. Ändpunkterna kan alltså inte vara inflexionspunkter.

Vi har $f''(x) = 2$ då $x \neq 0$, så enligt följdsatsen till Lagranges medelvärdessats är f konvex på båda sidor om $x = 0$. Eftersom f är kontinuerlig är f därför konvex på hela sin definitionsmängd, dvs på $D_f = [-4, 2]$.

Svar: Funktionen f är konvex överallt och saknar inflexionspunkter.

4. Vi börjar med att undersöka funktionens definitionsmängd, som innehåller alla reella tal där nämnaren inte är noll eller odefinierad. Nämnarens nollställen ges av

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1.$$

Här *kanske* det finns lodräta asymptoter (vi undersöker strax). Uttrycket under rottecknet måste dessutom vara större än noll, dvs

$$x^2 + 4x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)(x+1) > 0.$$

Med förenklad teckentabell ser vi att detta gäller för alla $x < -3$ och alla $x > -1$. Funktionens definitionsmängd är alltså $D_f = (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$.

Sneda asymptoter: Funktionen är inte en rationell funktion, så vi måste undersöka med den allmänna metoden, och får då undersöka fallen $x \to \infty$ och $x \to -\infty$ var för sig.

Fallet $x \to \infty$: Vi söker en asymptot på formen $y = k_1 x + m_1$. Vi får

$$\begin{aligned} k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2+4x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 1, \end{aligned}$$

och

$$
\begin{aligned}
m_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) - k_1 x &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}} - x = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+4x+3}} = [\text{förläng med konjugatet}] = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2+4x+3)}{\sqrt{x^2+4x+3}(x^2 + x\sqrt{x^2+4x+3})} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3 - 3x^2}{x^2\sqrt{x^2+4x+3} + x(x^2+4x+3)} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3 - 3x^2}{x^3\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + x^3 + 4x^2 + 3x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + 1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{-4}{2} = -2.
\end{aligned}
$$

Alltså finns en asymptot $y = x - 2$ då $x \to \infty$.

Fallet $x \to -\infty$: Vi söker en asymptot på formen $y = k_2 x + m_2$. Vi får

$$
\begin{aligned}
k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2+4x+3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = -1,
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
m_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - k_2 x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}} + x = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+4x+3}} = [\text{förläng med konjugatet}] = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2+4x+3)}{\sqrt{x^2+4x+3}(x^2 - x\sqrt{x^2+4x+3})} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3 - 3x^2}{x^2\sqrt{x^2+4x+3} - x(x^2+4x+3)} = \\
&= \lim_{x\to infty} \frac{-4x^3 - 3x^2}{x^2|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - x^3 - 4x^2 - 3x} \\
&= \lim_{x\to infty} \frac{-4x^3 - 3x^2}{-x^3\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - x^3 - 4x^2 - 3x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + 1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2.
\end{aligned}
$$

Alltså finns en asymptot $y = -x + 2$ då $x \to -\infty$.

Lodräta asymptoter: Enda möjligheterna är $x = -3$ eller $x = -1$, och för att undersöka gränsvärdena för dessa värden underlättar det om vi först faktoriserar uttrycket under rottecknet (vi vet ju redan dess nollställen):

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x+3)(x+1)}}.$$

De relevanta gränsvärdena blir

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2}{\sqrt{(x+3)(x+1)}} = \infty,$$

och

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{(x+3)(x+1)}} = \infty.$$

Alltså är både $x = -3$ och $x = -1$ lodräta asymptoter. (Gränsvärdena från "andra hållet" finns inte eftersom f är odefinierad på $[-3, -1]$.)

Kritiska punkter: Vi deriverar $f(x)$ med kvotregeln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}}\right] = \frac{2x\sqrt{x^2+4x+3} - x^2 \cdot \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}}}{x^2+4x+3} = \\ &= \frac{2x(x^2+4x+3) - x^2(x+2)}{(x^2+4x+3)^{3/2}} = \frac{2x^3+8x^2+6x-x^3-2x^2}{(x^2+4x+3)^{3/2}} = \\ &= \frac{x^3+6x^2+6x}{(x^2+4x+3)^{3/2}} = \frac{x(x^2+6x+6)}{(x^2+4x+3)^{3/2}}. \end{aligned}$$

De kritiska punkterna ges av $x = 0$ och

$$x^2 + 6x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3},$$

där endast $x = 0$ och $x = -3 - \sqrt{3}$ ligger i funktionens definitionsmängd.

Randpunkter: Saknas, och eftersom vi har sneda asymptoter behöver vi inte räkna några gränsvärden då $x \to \pm\infty$.

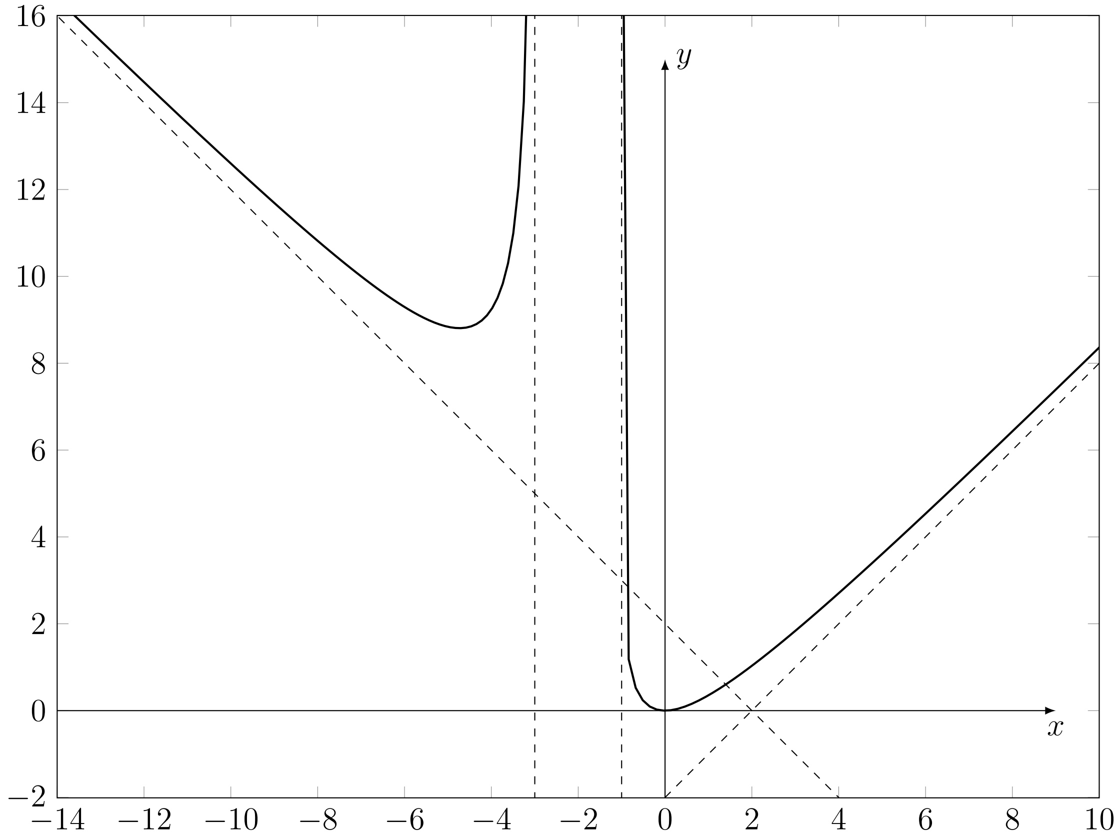
Singulära punkter: Saknas, eftersom $f'(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$.

Vi kan nu göra upp följande teckentabell:

x	$(-\infty)$		$-3-\sqrt{3}$		-3^-		-1^+		0		(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	(∞)	odef.	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\searrow$	$f(-3-\sqrt{3})$	$\nearrow$	(∞)	odef.	(∞)	$\searrow$	0	$\nearrow$	(∞)

Det exakta värdet $f(-3-\sqrt{3})$ är för besvärligt att räkna ut, och vi nöjer oss med approximationen $f(-3-\sqrt{3}) \approx f(-5) = \frac{25}{\sqrt{8}}$ som ligger någonstans mellan 8 och 9.

Vi skisserar slutligen kurvan:



Svar: Kurvan har en sned asymptot $y = x - 2$ då $x \to \infty$, en sned asymptot $y = 2 - x$ då $x \to -\infty$, samt lodräta asymptoter $x = -3$ och $x = -1$. Det finns ett lokalt minimum i $x = -3 - \sqrt{3}$ och ett lokalt minimum i $x = 0$.

5. Vi väljer att räkna enhetslöst för att förenkla notationen. Vätskan i tanken kommer att utgöra en kon som i varje ögonblick är likformig med tanken, dvs om $r(x)$ är ”vätskekonens” radie så måste

$$\frac{r(t)}{y(t)} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad r(t) = \frac{y(t)}{3}.$$

Vätskans volym vid tiden t kommer att vara

$$V(t) = \frac{r(t)^2 \pi y(t)}{3} = \frac{\left(\frac{y(t)}{3}\right)^2 \pi y(t)}{3} = \frac{\pi y(t)^3}{27}.$$

Eftersom vi är intresserade av $y'(t)$ då $y(t) = 1$ deriverar vi implicit (med avseende på t) och får

$$\begin{aligned} D[V(t)] &= D\left[\frac{\pi y(t)^3}{27}\right] \quad \Leftrightarrow \\ V'(t) &= \frac{\pi y(t)^2 \cdot y'(t)}{9} \quad \Leftrightarrow \\ y'(t) &= \frac{9V'(t)}{\pi y(t)^2}. \end{aligned}$$

Låt t^* vara ögonblicket då $y(t^*) = 1$. Utflödet/volymminskningshastigheten beror inte på t, så $V'(t^*) = -0.1$. Vi får därför $y'(t^*) = -\dfrac{0.9}{\pi}$, vilket betyder att höjden minskar med $\dfrac{0.9}{\pi}$m/s.

Svar: Höjden minskar med $\dfrac{0.9}{\pi}$m/s.

6. Vi testar lösningarna till $x^2 - x - 2 = 0$, dvs $x = -1$ och $x = 2$ i ekvationen. Detta visar att lösningen $x = -1$ finns för alla värden på C. Då $x^2 - x - 2 \neq 0$ kan vi lösa ut C som

$$C = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}.$$

Genom att sedan skissera kurvan till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

kan vi se hur många gånger varje funktionsvärde antas, dvs hur många x (förutom $x = -1$ och $x = 2$) som ger ett visst C.

Genom att utföra polynomdivision och faktorisering kan vi förenkla funktionsuttrycket till

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{3x + 3}{(x + 1)(x - 2)} = x + 1 + \frac{3}{x - 2}.$$

Kvotpolynomet blev ett förstagradspolynom, så vi har en sned asymptot $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$. Eftersom

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x + 1 + \frac{3}{\underbrace{x - 2}_{<0}} = -\infty$$

och

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 1 + \frac{3}{\underbrace{x - 2}_{>0}} = \infty$$

är $x = 2$ en lodrät asymptot. Eftersom $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$ är $x = -1$ inte en asymptot, och där händer ingenting spännande.

Vi söker nu extrempunkter. Derivering ger

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x - 2)^2},$$

så de *kritiska punkterna* ges av

$$1 - \frac{3}{(x - 2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

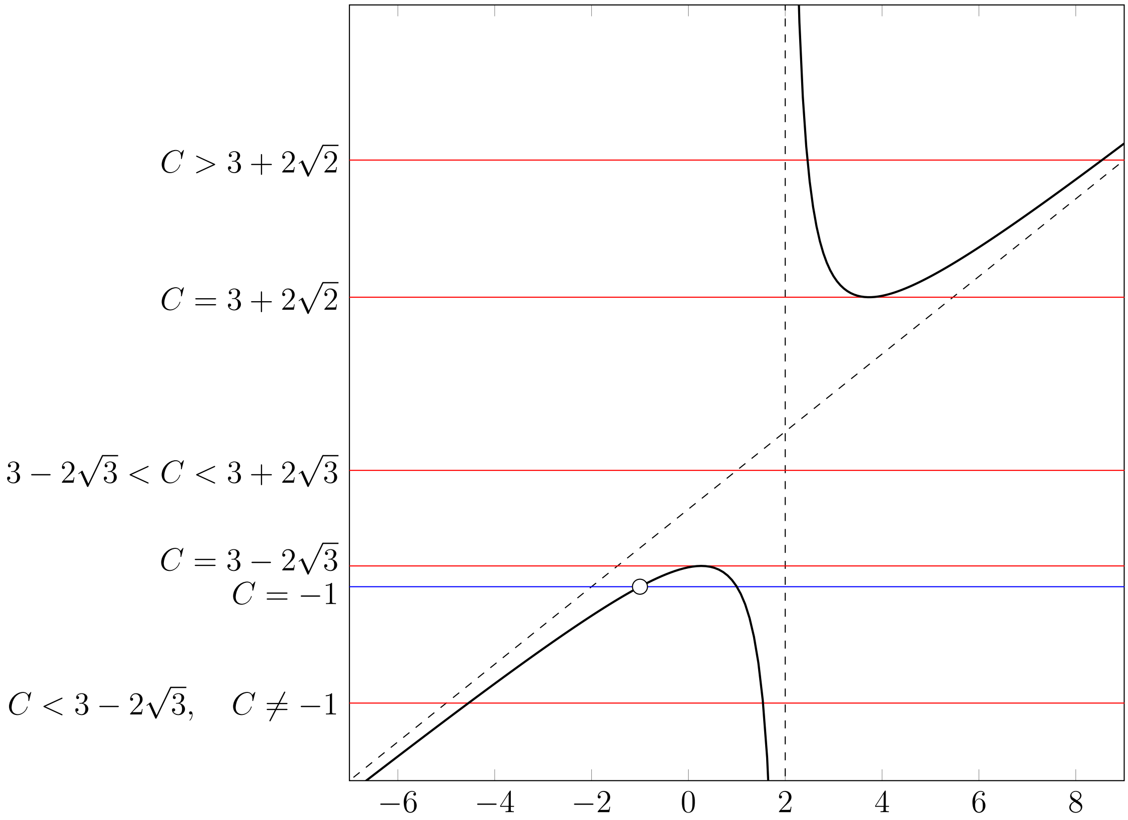
Randpunkter saknas, men eftersom vi har asymptoten $y = x+1$ vet vi hur funktionen uppför sig för stora positiva och negativa x.

Singulära punkter saknas, eftersom f är deriverbar på hela sin definitionsmängd.

Genom att undersöka derivatan mellan alla intressanta punkter får vi teckentabellen:

x	$(-\infty)$		-1		$2 - \sqrt{3}$		2^-	2^+		$2 + \sqrt{3}$		(∞)
$f'(x)$		$+$	odef.	$+$	0	$-$	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	odef.	$\nearrow$	$3 - 2\sqrt{3}$	$\searrow$	$(-\infty)$	$(+\infty)$	$\searrow$	$3 + 2\sqrt{3}$	$\nearrow$	(∞)

Vi skisserar kurvan:



Förutom de lösningarna som framgår av figuren har vi ju dessutom alltid lösningen $x = -1$ för alla C (se början av uppgiften).

Svar: Det gäller att

- då $C < 3 - 2\sqrt{3}$ och $C \neq -1$ har ekvationen tre lösningar,
- då $C = -1$ har ekvationen två lösningar,
- då $C = 3 - 2\sqrt{3}$ har ekvationen två lösningar,
- då $3 - 2\sqrt{3} < C < 3 + 2\sqrt{3}$ har ekvationen en lösning,
- då $C = 3 + 2\sqrt{3}$ har ekvationen två lösningar, och
- då $C > 3 + 2\sqrt{3}$ har ekvationen tre lösningar.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 2.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 7.