Sammanställning av bevis

MVE425 Matematik, del C, våren 2019

1 Satsen om sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet (avsnitt 6.4)

Sats. *Låt f vara en funktion som är deriverbar i punkten $a \in D_f$. Då är f även kontinuerlig i punkten a.*

Bevis. Förutsättningen att f är deriverbar i punkten a innebär att gränsvärdet

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. Det gäller att

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) + f(a) = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a),\end{aligned}$$

vilket visar att f är kontinuerlig i a. □

2 Produktregeln (avsnitt 6.5)

Sats (Produktregeln)**.** *Låt f och g vara deriverbara i punkten x. Då är*

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis. Låt $z(x) = f(x)g(x)$. Enligt derivatans definition är

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = (*). \end{aligned}$$

Eftersom f och g antogs deriverbara i punkten gäller att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{och} \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

Dessutom är g (och förstås även f) kontinuerlig i x, eftersom den är deriverbar där, så alltså måste $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. Sammantaget ger detta nu

$$(*) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Detta visar att $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, som utlovat. □

3 Kvotregeln (avsnitt 6.5)

Sats. *Låt f och g vara deriverbara i punkten x, och antag att $g(x) \neq 0$. Då är*

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Bevis. Vi nöjer oss med att bevisa kvotregeln under den extra förutsättningen (som är sann, men som vi helt enkelt bara tar för given) att kvoten $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ är deriverbar.

Genom att multiplicera båda sidor med $g(x)$ får vi $f(x) = R(x)g(x)$, och produktregeln ger nu

$$\begin{aligned} f'(x) &= R'(x)g(x) + R(x)g'(x) \quad \Leftrightarrow \\ R'(x)g(x) &= f'(x) - R(x)g'(x) \quad \Leftrightarrow \\ R'(x)g(x) &= f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}\,g'(x) \quad \Leftrightarrow \\ R'(x)g(x) &= f'(x)\,\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\,g'(x) \quad \Leftrightarrow \\ R'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

vilket visar att

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

4 Sinusfunktionens derivata (avsnitt 6.6)

Sats. *Det gäller att $D[\sin x] = \cos x$.*

Bevis. Här behöver vi komma ihåg additionsformeln

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

samt de båda gränsvärdena

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{och} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0.$$

Enligt derivatans definition gäller nu

$$D[\sin x] = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x + \frac{\cos h - 1}{h} \sin x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x = \cos x.$$

□

5 Exponentialfunktionens derivata (avsnitt 6.6)

Sats. *Det gäller att* $D[e^x] = e^x$.

Bevis. Här behöver vi komma ihåg gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Enligt derivatans definition gäller nu

$$D[e^x] = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = 1 \cdot e^x = e^x.$$

□

6 Naturliga logaritmens derivata (avsnitt 6.6)

Sats. *Det gäller att* $D[\ln x] = \frac{1}{x}$.

Bevis. Låt $y = f(x) = \ln x$. Då ges inversen till $f(x)$ av $x = g(y) = e^y$, dvs det gäller då att $g(f(x)) = x$. Kedjeregeln ger nu

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= x \quad \Rightarrow \\
D[g(f(x))] &= D[x] \quad \Leftrightarrow \\
g'(f(x))f'(x) &= 1 \quad \Leftrightarrow \\
g'(y)f'(x) &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad [\text{eftersom } g'(y) = e^y] \\
e^y f'(x) &= 1 \quad \Leftrightarrow \\
f'(x) &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

□

7 Arcustangensfunktionens derivata (avsnitt 6.6)

Sats. *Det gäller att* $D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$.

Bevis. Låt $y = f(x) = \arctan x$. Då ges inversen till $f(x)$ av $x = g(y) = \tan y$, dvs det gäller då att $g(f(x)) = x$. Kedjeregeln ger nu

$$\begin{aligned}
g(f(x)) = x \quad &\Rightarrow \\
D[g(f(x))] = D[x] \quad &\Leftrightarrow \\
g'(f(x))f'(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \\
g'(y)f'(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad [\text{eftersom } g'(y) = 1 + \tan^2 y] \\
(1 + \tan^2 y)f'(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad [\text{eftersom } \tan^2(\underbrace{\arctan x}_{y}) = x^2] \\
f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

□

8 Lagranges medelvärdessats (avsnitt 7.2)

Sats. *Antag att funktionen $f(x)$ uppfyller*

(i) *$f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$, och*

(ii) *$f(x)$ är deriverbar på (a, b).*

Då existerar (minst) ett $\xi \in (a, b)$ så att $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Bevis. Ingår inte. □

9 Följdsatsen till medelvärdessatsen (avsnitt 7.2)

Sats. *Antag att funktionen $f(x)$ är deriverbar på ett intervall I. Då gäller att*

(i) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad$ *f är strängt växande på I.*

(ii) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad$ *f är konstant på I.*

(iii) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad$ *f är strängt avtagande på I.*

(iv) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad$ *f är växande på I.*

(v) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad$ *f är avtagande på I.*

Bevis. Låt $x_1, x_2 \in I$ och antag att $x_1 < x_2$. Nu är x kontinuerlig på $[x_1, x_2]$ och deriverbar på (x_1, x_2), så förutsättningarna för medelvärdessatsen är uppfyllda. Det finns alltså ett $\xi \in (x_1, x_2)$ sådant att $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ vilket vi även kan skriva som $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Vi får nu i de olika fallen (ett fall räcker på tentan, men välj inte fall (ii))

(i) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$, dvs $f(x_2) > f(x_1)$, och funktionen är alltså strängt växande på I.

(ii) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} = 0$, dvs $f(x_2) = f(x_1)$, och funktionen är alltså konstant på I.

(iii) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0$, dvs $f(x_2) < f(x_1)$, och funktionen är alltså strängt avtagande på I.

(iv) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0$, dvs $f(x_2) \geq f(x_1)$, och funktionen är alltså växande på I.

(v) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\leq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \leq 0$, dvs $f(x_2) \leq f(x_1)$, och funktionen är alltså avtagande på I.

□