Derivata

Vi börjar med att repetera ett par viktiga begrepp från förra delkursen, nämligen gränsvärden och kontinuitet.

En funktion $f(x)$ kan ha ett högergränsvärde i a, som (om det finns) är det reella tal som $f(x)$ "kommer oändligt nära" då x "kommer oändligt nära" a från höger. Detta skrivs $\lim_{x \to a^+} f(x)$. På motsvarande sätt kan vi ibland tala om ett vänstergränsvärde i a, som skrivs $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

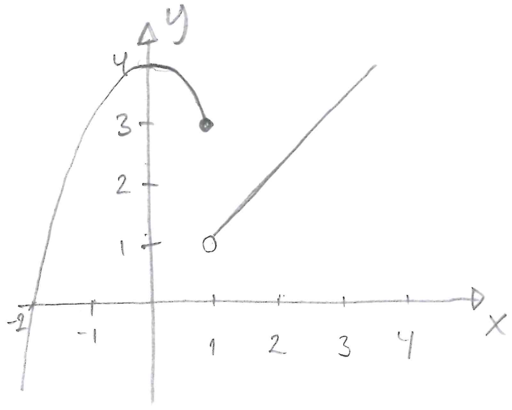
Exempel: Funktionen $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{om } x \leq 1 \\ x & \text{om } 1 < x \end{cases}$

har högergränsvärdet

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

och vänstergränsvärdet

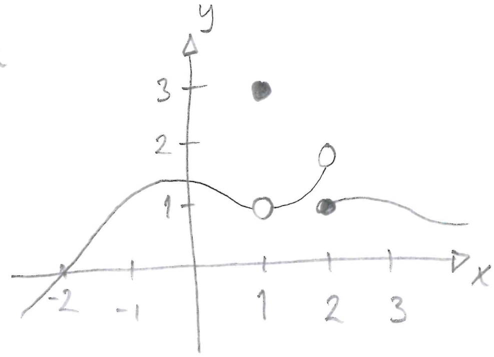
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 4 - x^2 = 3$$



i $a=1$. Funktionsvärdet i punkten är $f(1)=3$.

Definition: Om $f(x)$ har ett högergränsvärde och ett vänstergränsvärde i a, och dessa är lika, säger vi att $f(x)$ har ett gränsvärde i a (som är lika med höger- och vänstergränsvärdena) och betecknar det $\lim_{x \to a} f(x)$.

Exempel: Låt $f(x)$ vara funktionen i figuren. Här existerar inte gränsvärdet $\lim_{x \to 2} f(x)$, eftersom



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1.$$

Däremot existerar gränsvärdet $\lim_{x \to 1} f(x)$, då

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x),$$

dvs

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

Observera dock att $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(x) = 3$.

Alltså:

(i) $x = a$ och $x \to a$ betyder olika saker!

(ii) Bara för att $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar är det inte säkert att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ säger vi att f är <u>kontinuerlig</u> i a.

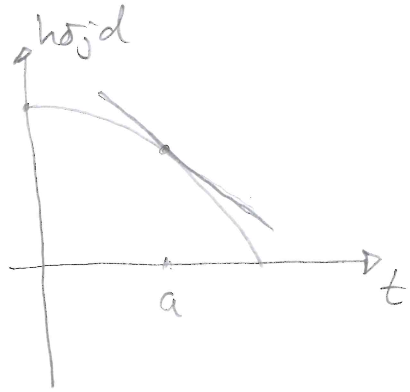
Om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd kallar vi f för <u>kontinuerlig</u>.

Följande funktioner (och sammansättningar osv) är kontinuerliga:

- polynom
- potensfunktioner (även rötter)
- exponentialfunktioner
- logaritmer
- trigonometriska funktioner
- rationella funktioner
- ...

Vi skall nu strax införa begreppet derivata, som kan tolkas som en funktions tillväxthastighet, men först lite motivering till varför.

Exempel: Antag att ett föremål släpps (i vila) från 10 m över marken. Då beskriver $f(t)=10-\frac{g}{2}t^2$ föremålets höjd över marken vid tiden t, där $g \approx 9{,}82$ är tyngdaccelerationen.



Hur snabbt faller föremålet vid tiden $t=a$? Detta ges av (negativa) lutningen av kurvans tangent i punkten. I det här fallet säger fysikens lagar att hastigheten ges av $v(t)=-gt$, men vi vill kunna räkna fram motsvarande för andra funktioner också.

Problem: Beräkna lutningen för kurvan till $f(x)$ i punkten x.

Idé: Tag en till punkt $x+h$ för ett litet h, och beräkna lutningen för den räta linjen genom $(x, f(x))$ och $(x+h, f(x+h))$. Låt sedan $h \to 0$.

Riktningskoefficienten för linjen blir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Definition: Om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existerar säger vi att f är <u>deriverbar</u> i a, och vi kallar gränsvärdet $f'(a)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$ för <u>derivatan</u> av f i a.

Funktionen $f'(x)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kallar vi för <u>derivatan</u> av f.

Andra beteckningar man kan drabbas av är:

$$y'(x),\ y',\ f',\ \dot{y},\ \dot{f},\ Dy,\ Df,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \ldots$$

Exempel: Bestäm f' om $f(x)=x^2$. Definitionsmängden är $\mathbb{R}$. Enligt definitionen får vi

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x.$$

Om n är ett positivt heltal går det på ett liknande sätt att visa att $D[x^n]=nx^{n-1}$, dvs $D[x^3]=3x^2$, $D[x^{10}]=10x^9$, osv.

Exempel: Beräkna $\frac{df}{dx}$ om $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$. Här är $D_f=[0,\infty)$. För $x>0$ gäller

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Exempel: Bestäm $f'(x)$ då $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$. Här är $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

För $x\neq 0$ är

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}.$$

Exemplen ovan troliggör att $D[x^r]=rx^{r-1}$ även om r inte är ett positivt heltal. Detta är sant, och vi skall återkomma till det längre fram, men tills vidare använder vi denna räkneregel utan bevis.

Eftersom $f'(a)$ är riktningskoefficienten för tangenten i $x=a$ kan vi beräkna tangenter och normaler till en kurva med hjälp av derivatan.

Exempel: Bestäm ekvationen för tangenten till $f(x)=\frac{1}{x^2}$ i punkten $x=-2$. Om vi skriver tangentens ekvation som $y=k_T x+m_T$ får vi $k_T=f'(-2)$ och kan sedan använda exempelvis enpunktsformeln.

Vi beräknar $f'(x)=D[\frac{1}{x^2}]=D[x^{-2}]=-2x^{-3}$ och får $k_T=f'(-2)=\frac{1}{4}$. Eftersom $(-2, f(-2))$ ligger på linjen ger enpunktsformeln att

$$y-f(-2)=k_T(x-(-2)) \Leftrightarrow$$

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{4} \Leftrightarrow y=\frac{x+3}{4}.$$

Exempel: Bestäm ekvationen för normalen till $f(x)=x\sqrt{x}=x^{3/2}$ i punkten $x=\frac{1}{2}$. Normalen är vinkelrät mot tangenten, så riktningskoefficienten k_N för normalen är lika med $-\frac{1}{k_T}$ (där k_T är tangentens riktningskoefficient).

Vi beräknar $f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$, som ger oss

$$k_N=-\frac{1}{k_T}=-\frac{1}{f'(\frac{1}{2})}=-\frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ ligger på normalen, så enpunktsformeln ger oss

$$y - f\left(\tfrac{1}{2}\right) = k_N\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{12}.$$