

Höger- och vänsterderivator, kontinuitet, och deriveringsreger

Vi säger att en funktion f är deriverbar i $a \in D_f$ om $f'(a)$ existerar. Då $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ser vi att f är deriverbar i $a \in D_f$ precis då

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a),$$

där $f'_+(a)$ kallas högerderivatan av f i a och $f'_-(a)$ kallas vänsterderivatan.

En funktion är inte alltid deriverbar överallt där den är definierad, och det är inte säkert att den har höger- eller vänsterderivata överallt.

Vi har definierat två begrepp med hjälp av gränsvärden:

- (i) kontinuitet, och
- (ii) deriverbarhet.

Hänger dessa ihop? I så fall, hur? Vi har

tre möjligheter: (i) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ (ii), (ii) $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ (i), och (i) $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$ (ii).

Sats: Om f är deriverbar i $a \in D_f$ så är f även kontinuerlig i a .

Bevis: Eftersom f är deriverbar i a existerar

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \text{ Vi vill visa att } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) + f(a) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a), \end{aligned}$$

dvs f är kontinuerlig i a .

Det omvända gäller inte!

Exempel: Om $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$

$$\text{gäller } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

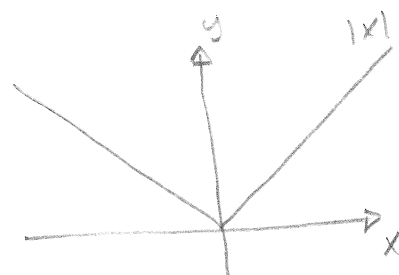
$$\text{och } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0,$$

så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ (dvs f är kontinuerlig i $x=0$).

$$\text{Vi får även } f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h+0| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{och } f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h+0| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Då $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ är f inte deriverbar i $x=0$.



Slutsats: Kantor och spetsar är inte deriverbara.

För derivator gäller ett antal praktiska räkneregler (derivationsregler)

Sats: Om f och g är deriverbara funktioner gäller att

- (i) $D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$
 - (ii) $D[cf(x)] = c \cdot D[f(x)]$ om c konstant
 - (iii) $D[f(x)g(x)] = D[f(x)]g(x) + f(x) \cdot D[g(x)]$
 - (iv) $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)]g(x) - f(x) \cdot D[g(x)]}{g(x)^2}$ om $g(x) \neq 0$
- } linearitet
produktregeln
kvotregeln

Bevis: (i) Låt $z(x) = f(x) + g(x)$. Då gäller att

$$z'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

dvs $D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$.

(ii) Det gäller att

$$D[cf(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x),$$

dvs $D[cf(x)] = cD[f(x)]$.

Exempel: Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = 2x^5 - 3x\sqrt{x} + 7$ ($= 2x^5 - 3x^{3/2} + 7$)

Vi får

$$D[2x^5 - 3x^{3/2} + 7] = D[2x^5] + D[-3x^{3/2}] + D[7] =$$

$$= 2D[x^5] - 3D[x^{3/2}] + D[7] = 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} + 0 =$$

$$= 10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}.$$

Svar: $f'(x) = 10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}$

(4)

Anmärkning: Normalt sett gör vi det inte så detaljerat, utan går direkt från $D[2x^5 - 3x^{3/2} + 7]$ till $10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}$.

Bevis (fortsättning): (iii) Låt $z(x) = f(x)g(x)$. Då blir

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underbrace{g(x+h)}_{\rightarrow g(x) \text{ då } g \text{ kontinuerlig}} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

dus $D[f(x)g(x)] = D[f(x)]g(x) + f(x)D[g(x)]$.

Exempel: Bestäm derivatan till $f(x) = (x^3 + 2)\sqrt{x}$.

Produktregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= D[(x^3 + 2)\sqrt{x}] = D[x^3 + 2]\sqrt{x} + (x^3 + 2)D[\sqrt{x}] = \\ &= (3x^2 + 0)\sqrt{x} + (x^3 + 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3 + 2}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{6x^3 + x^3 + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 + 2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = \frac{7x^3 + 2}{2\sqrt{x}}$.

Bevis (fortsättning): (iv) Vi tillåter oss att antaga att $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ är deriverbar (det är sant, men vi bevisar det inte).

Då gäller att $f(x) = R(x)g(x)$, och
produktregeln ger

$$f'(x) = R'(x)g(x) + R(x)g'(x).$$

Vi löser ut $R'(x)$:

$$R'(x)g(x) = f'(x) - R(x)g'(x) \Leftrightarrow$$

$$R'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{R(x)g'(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{\frac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

$$\text{Alltså är } D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{D[\sqrt{x}](1+x^2) - \sqrt{x} D[1+x^2]}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x^2) - \sqrt{x} \cdot (0+2x)}{(1+x^2)^2} = \left[\text{Förång med } 2\sqrt{x} \right] = \frac{1+x^2 - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$

$$\text{Svar: } f'(x) = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^2}.$$