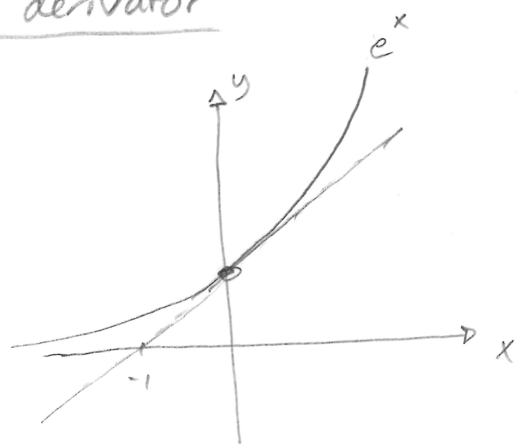
Mårten Wadenbäck

Elementära funktioners derivator



Vi erinrar oss att den naturliga exponentialfunktionen $f(x)=e^x$ är den exponentialfunktion vars tangent i $(0,1)$ skär x-axeln i $(-1,0)$, dvs $f(x)=e^x$ är den exponentialfunktion som har lutningen $f'(0)=1$ i $x=0$.

Det gäller alltså, per definition, att

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

Vi använder det för att bestämma derivatan av exponentialfunktioner!

Sats: (i) $D[e^x]=e^x$

(ii) $D[a^x]=a^x\ln a$ (om $a>0$).

Bevis: (i) Vi får

$$D[e^x]=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x e^0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0} e^x\cdot\underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1}=e^x\cdot 1=e^x.$$

(ii) Vi använder omskrivningen $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$:

$$D[a^x] = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{e^{h \ln a} - 1}{h} = \begin{bmatrix} s = h \ln a \\ h = \frac{s}{\ln a} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{s \to 0} a^x \cdot \frac{e^s - 1}{\frac{s}{\ln a}} = \lim_{s \to 0} a^x \cdot \ln a \cdot \underbrace{\frac{e^s - 1}{s}}_{\to 1} =$$

$$= a^x \ln a.$$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x) = x \cdot 2^x$.

Produktregeln ger

$$f'(x) = D[x]\, 2^x + x\, D[2^x] = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \ln 2 =$$

$$= 2^x(1 + x \ln 2).$$

Svar: $f'(x) = 2^x(1 + x \ln 2)$.

Logaritmfunktioner är också deriverbara:

Sats: (i) $D[\ln x] = \frac{1}{x}$

(ii) $D[{}^{a}\log x] = \frac{1}{x \ln a}$

Vi bevisar detta nästa föreläsning, då vi kan göra ett enklare bevis.

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x) = \ln(4x^2)$

och $g(x) = {}^a\log(kx)$ då $k>0$ är en konstant.

Vi använder logaritmlagarna och får

$$f'(x) = D[\ln(4x^2)] = D[\ln 4 + \ln(x^2)] =$$
$$= D[\ln 4 + 2\ln x] = 0 + 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

och

$$g'(x) = D[{}^a\log(kx)] = D[{}^a\log k + {}^a\log x] =$$
$$= 0 + \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Svar: $f'(x) = \frac{2}{x}$ och $g'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

Vi skall nu derivera trigonometriska funktioner, och påminner oss om gränsvärdena

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{t\to} \frac{1-\cos t}{t} = 0.$$

Sats (de trigonometriska funktionernas derivator):

(i) $D[\sin x] = \cos x$

(ii) $D[\cos x] = -\sin x$

(iii) $D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$

(iv) $D[\cot x] = -1 - \cot^2 x.$

Bevis: (i) Vi använder additionsformeln för sinus,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$:

$$D[\sin x] = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} =$$

$$= 1 \cdot \cos x - \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

(ii) Eftersom $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ blir

$$D[\cos x] = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} =$$

$$= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x.$$

(iii) Då $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ får vi, enligt kvotregeln:

$$D[\tan x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{D[\sin x] \cos x - \sin x \cdot D[\cos x]}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} & \text{enligt trigonometriska ettan, eller} \\ \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x. \end{cases}$$

(iv) Bevisas med kvotregeln, då $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Vi gör inte detta här utan lämnar det som övning.