Mårten Wadenbäck

Sammansatta funktioner och inversa funktioner

Vi börjar med att komplettera vår lista med allmänna deriverings-regler, dvs

(i) $D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$
(ii) $D[cf(x)] = cf'(x)$ om c konstant — linearitet

(iii) $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ — produktregeln (Leibniz formel)

(iv) $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ — kvotregeln

genom att lägga till följande: (v) $D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$.

Sats (Kedjeregeln): Antag att g är deriverbar i x och att f är deriverbar i $g(x)$. Då gäller att

$$D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

($g'(x)$ kallas <u>inre derivatan</u>)

Anmärkning: Vi kan skriva $y=f(g(x))$ som $y=f(u)$ med $u=g(x)$. Med Leibniz beteckningar för derivatan får kedjeregeln det tilltalande utseendet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Exempel: Bestäm derivatan av $y(x)=\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{1/2}$.

Här kan vi skriva $y(x)=f(u)=\sqrt{u}$ med $u(x)=1+x^2$,

och kedjeregeln ger

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Alternativt kan vi skriva endast

$$y'(x)=D[\sqrt{1+x^2}]=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Svar: $y'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exempel: Bestäm derivatan av $y(x)=e^{x\cdot\sin x}$.

Med $y(x)=f(u)=e^u$ och $u(x)=x\sin x$ ger kedjeregeln

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u D[x\sin x]=$$
$$=e^{x\sin x}(\sin x+x\cos x).$$

Svar: $y'(x)=e^{x\sin x}(\sin x+x\cos x)$.

Bevis (av kedjeregeln): Låt $z(x)=f(g(x))$. Vi vill beräkna

$$z'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{z(x+h)-z(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}.$$

Vi sätter $k=g(x+h)-g(x)$, dvs $g(x+h)=g(x)+k$.

Det gäller att $k\to 0$ om $h\to 0$, eftersom $g(x)$ är deriverbar (och alltså kontinuerlig).

Sätter vi $y=g(x)$ blir $z'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(y+k)-f(y)}{h}$.

Om $k\neq 0$ kan vi förlänga kvoten, så att

$$z'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(y+k)-f(y)}{h}\cdot\frac{k}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{f(y+k)-f(y)}{k}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$$=f'(y)\cdot g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Det allmänna fallet, där vi inte behöver kräva att $k\neq 0$ är marginellt besvärligare att visa. Se appendix för en variant!

Funktioner kan sammansättas i flera steg, så att vi behöver använda kedjeregeln i flera steg för att beräkna derivatan.

Exempel: Bestäm derivatan av $y(x)=\sin(e^{3x^2+2x+5})$.

Om vi låter $f(u)=\sin u$, $u(v)=e^v$, och $v(x)=3x^2+2x+5$

blir $\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\cos u\cdot e^v\cdot(6x+2)=$

$$=\cos(e^v)e^v(6x+2)=2\cos(e^{3x^2+2x+5})e^{3x^2+2x+5}(3x+1).$$

Svar: $y'(x)=2\cos(e^{3x^2+2x+5})e^{3x^2+2x+5}(3x+1)$.

Vi kan nu derivera (i princip) alla funktioner vi kan skriva upp, bortsett från inversa trigonometriska funktioner. Dessa ordnar vi nästa gång!

Många operationer har en motsvarande "omvänd" operation som återställer saker. Detta brukar benämnas som <u>invers</u>.

Exempel: De fyra räknereglerna har inverser:

(i) addition och subtraktion är inverser till varandra,

(ii) multiplikation och division är varandras inverser.

För positiva x är även rötter och potenser varandras inverser.

För funktioner skall en invers uppfylla $f^{-1}(f(x))=x$ för alla $x \in D_f$ men även $f(f^{-1}(y))=y$ för alla $y \in D_{f^{-1}}$ (dvs för alla $y \in V_f$).

Eftersom exponentialfunktioner och logaritmer är varandras inverser kan vi använda $f^{-1}(f(x))=x$ tillsammans med kedjeregeln för att bevisa:

Sats: (i) $D[\ln x] = \frac{1}{x}$

(ii) $D[{}^{a}\log x] = \frac{1}{x \ln a}$

Bevis: (i) Låt $y=f(x)=\ln x$ och $x=g(y)=e^y$. Då blir f och g varandras inverser, så $g(f(x))=x$. Vi deriverar båda sidor med kedjeregeln, och får

$$D[g(f(x))] = D[x] \iff$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \iff$$

$g'(y) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$ [eftersom $g'(y) = e^y$]

$e^y \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$e^{\ln x} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$x f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$f'(x) = 1.$

(ii) Vi använder logaritmlagen ${}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$:

$$D[{}^a\log x] = D\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a} D[\ln x] = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$