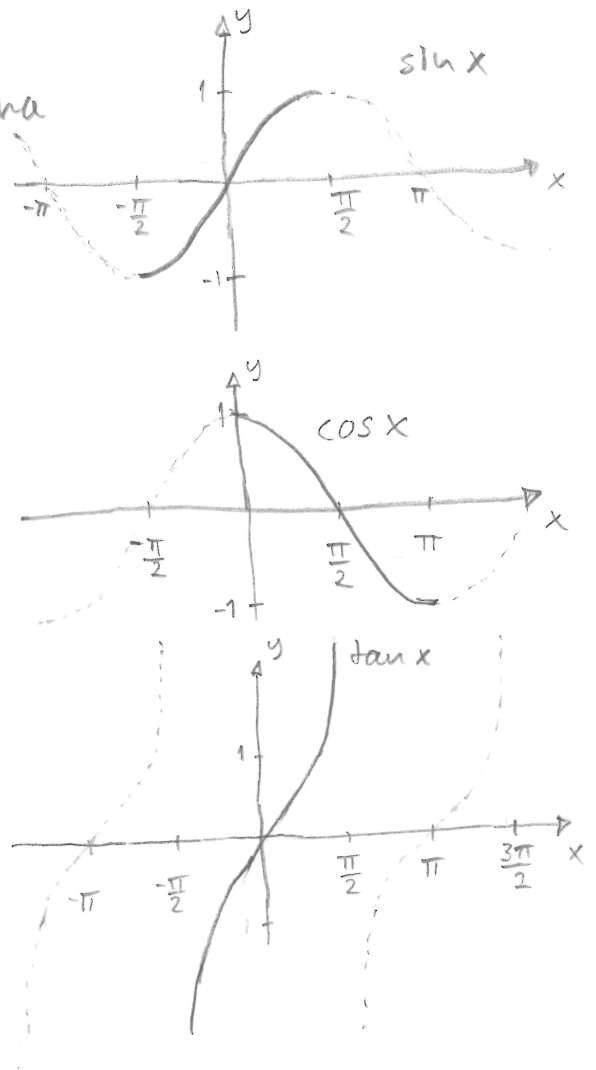


Fler derivator och implicit derivering

Som behant är de trigonometriska funktionerna periodiska, vilket betyder att de, i strikt mening, saknar inverser. När vi talar om inversa trigonometriska funktioner är det därför underförstått att vi begränsar definitionsmängderna (enligt figurerna).



Då gäller

$$(1) \quad \arcsin(\sin x) = x \quad \text{för alla } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin y) = y \quad \text{för alla } y \in [-1, 1]$$

$$(2) \quad \arccos(\cos x) = x \quad \text{för alla } x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos y) = y \quad \text{för alla } y \in [-1, 1]$$

$$(3) \quad \arctan(\tan x) = x \quad \text{för alla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(\arctan y) = y \quad \text{för alla } y \in \mathbb{R}.$$

Vi skall nu använda ovanstående för att bestämma de inversa trigonometriska funktionernas derivator.

Sats: (i) $D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) $D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$

Bevis: (i) Låt $y=f(x)=\arcsin x$. Då är inversen till $f(x)$ $x=g(y)=\sin y$, dvs $g(f(x))=x$. Nu måste

$$D[g(f(x))] = D[x] \Leftrightarrow$$

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(y)f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos y \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(ii) Lämnas som övning.

(iii) Låt $y=f(x)=\arctan x$. Då ges inversen till $f(x)$ av $x=g(y)=\tan y$, och vi har $g(f(x))=x$.

Nu gäller

$$D[g(f(x))] = D[x] \Leftrightarrow$$

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(y)f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(1+\tan^2 y) f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$.

Enligt kedjeregeln blir

$$f'(x) = D[\arccos(\sqrt{x})] = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} D[\sqrt{x}] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x) = \arctan(\sin x)$.

Vi får

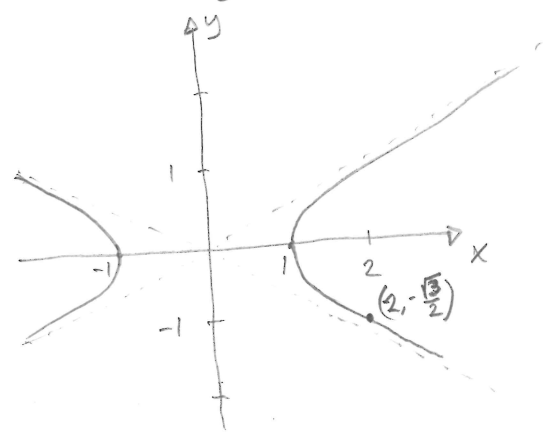
$$f'(x) = D[\arctan(\sin x)] = \frac{1}{1+\sin^2 x} D[\sin x] = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

Vi kan nu derivera så gott som alla funktioner som kan skrivas $f(x) = \dots$, dvs ett explicit uttryck med hjälp av de elementära funktionerna!

Ibland ges en funktion implicit, dvs funktionen ingår i en ekvation istället för på formen $f(x) = \dots$ (om ekvationen går att lösa kan vi skriva om den så).

Exempel: Bestäm ekvationen för tangenten till hyperbeln $x^2 - 4y^2 = 1$ i punkten $(2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

I närheten av den aktuella punkten definierar ekvationen en funktion $y = y(x)$.



(4)

Deriverar vi bägge led i denna ekvation ger ledjeregeln

$$D[x^2 - 4y(x)^2] = D[1] \Leftrightarrow 2x - 4 \cdot 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4y(x)y'(x) = x \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x}{4y(x)}.$$

I punkten $(2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ är alltså $y'(2) = \frac{2}{4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tangentens ekvation ges nu av punktsformeln:

$$y - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Exempel: En stor sfärisk ballong pumpas upp så att det varje sekund tillförs 0.1 m^3 luft. Hur snabbt växer ballongens radie i ögonblicket då radien är 1 m ?

Volymen ges av $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, och vi kan se

V som en funktion av antingen radien r eller tiden t .

Genom att derivera volymen med avseende på t får vi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = \frac{0.1}{4\pi \cdot 1^2} \text{ m/s} = \frac{1}{40\pi} \text{ m/s} \approx 8 \text{ mm/s}.$$

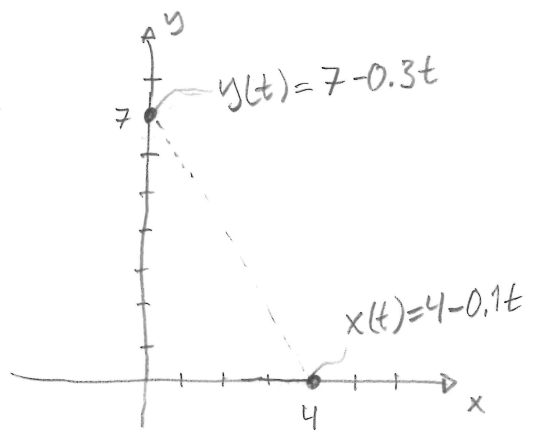
Exempel: Ett skepp i punkten $(0, 7)$ färdas mot origo med farten 0.3 (längdenheter per tidsenhet), och ett annat skepp i punkten $(4, 0)$ färdas mot origo med farten 0.1 .

Hur fort ändras avståndet mellan skeppen just nu?

Låt "just nu" vara tiden $t=0$.

Avståndet $d(t)$ mellan skeppen uppfyller Pythagoras sats:

$$d(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$$



Implicit derivering ger

$$2d(t) \cdot d'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t),$$

så $d(0) \cdot d'(0) = x(0) \cdot x'(0) + y(0) \cdot y'(0)$.

Här är allt känt utom $d'(0)$ (som ju efterfrågas).

Insättning ger

$$\sqrt{7^2 + 4^2} \cdot d'(0) = 4 \cdot (-0.1) + 7 \cdot (-0.3) \iff$$

$$d'(0) = -\frac{2.5}{\sqrt{65}} = -\frac{5}{2\sqrt{65}} \quad \left(\approx -\frac{5}{16} = -0.3125 \right).$$