MVE425 Matematik, del A, våren 2019, föreläsning 6

Mårten Wadenbäck

Extremvärden

Definition: Låt f vara en funktion och $x_0 \in D_f$. Då kallas x_0 för

(i) <u>global maxpunkt</u> om $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in D_f$

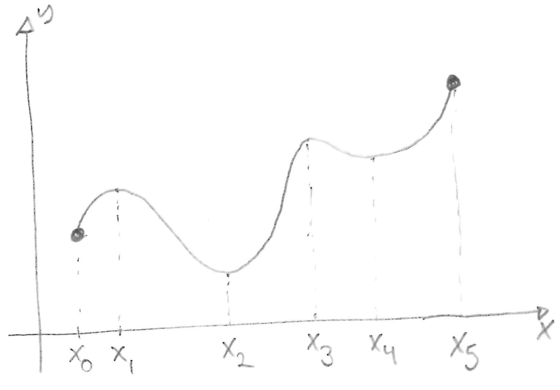
(ii) <u>global minpunkt</u> om $f(x) \geq f(x_0)$ för alla $x \in D_f$

(iii) <u>lokal maxpunkt</u> om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in D_f$ som uppfyller $|x - x_0| < \delta$

(iv) <u>lokal minpunkt</u> om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) \geq f(x_0)$ för alla $x \in D_f$ som uppfyller $|x - x_0| < \delta$

Motsvarande funktionsvärde, $f(x_0)$, kallas globalt/lokalt min-/maxvärde. Globala/lokala max-/minpunkter kallas med ett ord <u>extrempunkter</u>, och globala/lokala max-/minvärden kallas tillsammans <u>extremvärden</u>.

Exempel: För funktionen i figuren är x_0, x_2, och x_4 lokala minpunkter, medan x_1, x_3, och x_5 är lokala maxpunkter. Global minpunkt är x_2, och global maxpunkt är x_5.



Anmärkning: En global max- eller minpunkt är alltid även lokal, men inte det omvända!

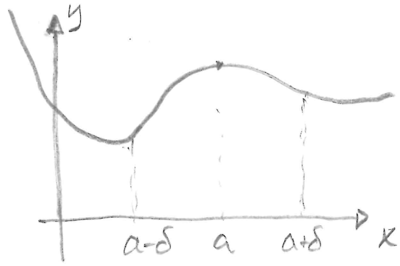
I exemplet ser vi att $f'(x)=0$ i de inre lokala extrempunkterna.

Detta är inte en tillfällighet!

Sats: Låt f vara deriverbar på ett öppet intervall I, och låt $a \in I$ vara en lokal maxpunkt (alternativt minpunkt). Då gäller att $f'(a)=0$.

Bevis: Eftersom a är en lokal maxpunkt finns det ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) \le f(a)$ för alla $x \in D_f$ med $|x-a| < \delta$, dvs om $|h| < \delta$ gäller

$$f(a+h) \le f(a) \Leftrightarrow$$
$$f(a+h) - f(a) \le 0.$$



Tittar vi på funktionens höger- och vänsterderivata i a får vi

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \le 0$$

och

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \ge 0.$$

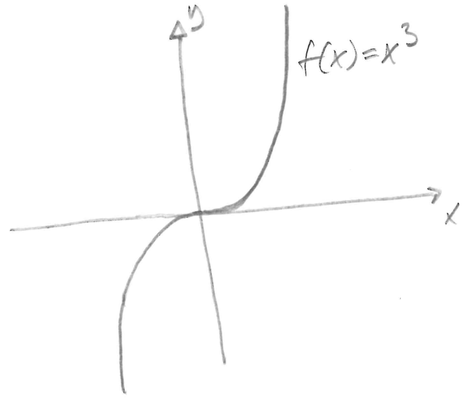
Eftersom f är deriverbar i a är $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$

så $0 \le f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \le 0$, dvs $0 \le f'(a) \le 0$.

Då måste $f'(a) = 0$.

Viktigt: Det omvända gäller <u>inte</u>! Om $f'(a)=0$ behöver inte a vara en maxpunkt eller minpunkt!

Exempel: Om $f(x)=x^3$ blir $f'(x)=3x^2$, så $f'(0)=0$. Dock är $x=0$ varken en maxpunkt eller en minpunkt (den är en så kallad <u>terrasspunkt</u>).



För att bestämma maxpunkter och minpunkter för en given funktion behöver vi undersöka de <u>kritiska punkterna</u> (som oftast istället kallas <u>stationära punkter</u>), dvs $x \in D_f$ där $f'(x)=0$. Det finns dock fler ställen vi måste leta på!

Sats: Om $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i $x_0 \in [a,b]$ så är x_0 av någon av typerna

(i) kritisk punkt, dvs $f'(x_0)=0$

(ii) randpunkt, dvs $x_0=a$ eller $x_0=b$

(iii) singulär punkt, dvs $f'(x_0)$ existerar inte

Bevis: Ingår inte!

Exempel: Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x)=x^2-x^4$ med $D_f=[-1,2]$. Största och minsta värde är funktionens globala extremvärden, och eftersom globala extremvärden även är lokala (men inte tvärtom!) talar föregående sats om var vi skall leta:

Kritiska punkter:

Derivatan är $f'(x)=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$, och dess nollställen är $x=0$ och $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Randpunkter: $x=-1$ och $x=2$

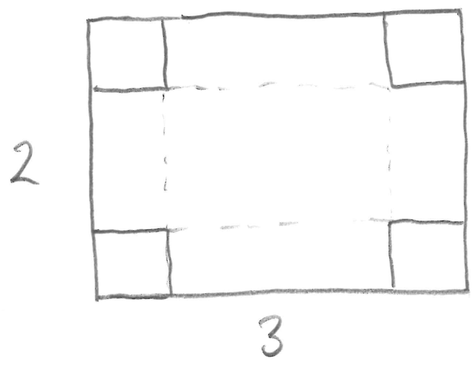
Singulära punkter: Saknas (gäller alltid för polynom)

Totalt har vi alltså de fem punkterna $x=-1$, $x=0$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, och $x=2$, och största och minsta värde antas i någon/några av dessa. Insättning ger

$$f(-1)=0, \quad f(0)=0, \quad f(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}})=\tfrac{1}{4}, \quad \text{och } f(2)=-12.$$

Största värde är alltså $\frac{1}{4}$ som antas i punkterna $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, och minsta värde är -12 som antas för $x=2$.

Exempel: Från en rektangulär plåt med sidolängderna 2 och 3 skall en låda (utan lock) tillverkas.



Detta sker genom att

lika stora kvadratiska hörn skärs bort, varpå sidorna viks upp längs de streckade linjerna i figuren. Bestäm sidan på de bortskurna kvadraterna så att lådans volym blir så stor som möjligt.

Om kvadraternas sida är x blir lådans volym

$$V(x) = x(3-2x)(2-2x) = x(6-10x+4x^2) = 4x^3-10x^2+6x$$

med $D_V = [0,1]$ (det går inte att ta bort mindre än noll, och inte heller mer än ett). Maximum kan antas i någon av följande:

Kritiska punkter:

Derivatan blir $V'(x) = 12x^2-20x+6$, och dess nollställen ges av $12x^2-20x+6=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{20}{12}x+\frac{6}{12}=0 \Leftrightarrow$

$$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Här är det bara $\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{7}}{6}$ som ligger i $[0,1]$.

Randpunkter: $x=0$ eller $x=1$.

Singulära punkter: saknas.

Insättning ger $V(0)=V(1)=0$ och $V\left(\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{7}}{6}\right) = \ldots = \frac{10+7\sqrt{7}}{27}$.

Största volymen fås alltså då $x = \frac{5}{6}-\frac{\sqrt{7}}{6}$.

Exempel: Bestäm största och minsta värde för $f(x)=e^{\sqrt[3]{x^2}}$ på $[-1,2]$.

Extremvärdena kan antas i:

Kritiska punkter:

Derivatan är $f'(x)=D[e^{x^{2/3}}]=e^{x^{2/3}}D[x^{2/3}]=\frac{2}{3}e^{x^{2/3}}\cdot x^{-1/3}=$

$=\frac{2e^{x^{2/3}}}{3x^{1/3}}$. Denna blir aldrig noll, så kritiska punkter saknas.

Randpunkter: $x=-1$ och $x=2$.

Singulära punkter: $x=0$ (eftersom $f'(x)$ blir odefinierad).

Insättning ger

$$f(-1)=e^{\sqrt[3]{(-1)^2}}=e^{\sqrt[3]{1}}=e^1=e$$

$$f(2)=e^{\sqrt[3]{2^2}}=e^{\sqrt[3]{4}}$$

$$f(0)=e^{\sqrt[3]{0}}=e^0=1.$$

Största värdet är $f(2)=e^{\sqrt[3]{4}}$ och minsta värdet är $f(0)=1$.