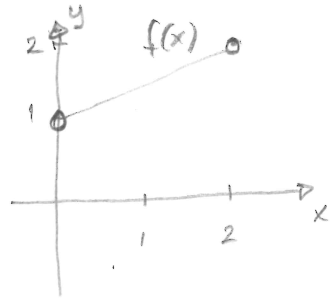
Mårten Wadenbäck

Existens av max/min, medelvärdessatsen, växande/avtagande

Alla funktioner antar inte största och minsta värden.

Exempel: Låt $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ med $D_f = (0, 2)$.

Då antar f varken ett största eller minsta värde.



Sats: Om f är en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall $[a,b]$ så antar f både ett största och ett minsta värde på $[a,b]$.

Bevis: Ingår ej!

En funktion kan anta ett största och ett minsta värde även om förutsättningarna i satsen inte är uppfyllda, men det är inte säkert!

Definition: Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. Om det för alla $x_1, x_2 \in I$ gäller att

(i) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ kallas f <u>växande</u> på I.

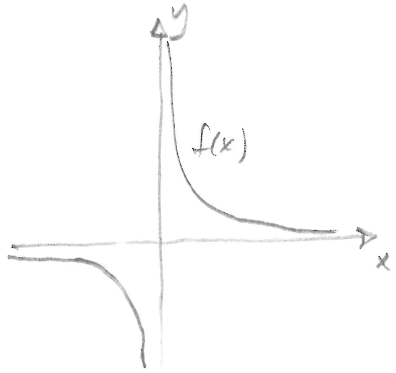
(ii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ kallas f <u>strängt växande</u> på I.

(iii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ kallas f avtagande på I.

(iv) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ kallas f strängt avtagande på I.

En funktion som är (strängt) växande eller avtagande kallas (strängt) monoton.

Exempel: Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är strängt avtagande på både $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$, men inte på $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Detta ser vi på följande sätt.



Om $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ och $x_1 < x_2$

blir $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{>0}}{\underbrace{x_1 x_2}_{>0}} > 0,$

så $f(x_1) > f(x_2)$ och f är strängt växande.

På samma sätt får vi att f är strängt växande på $(0, \infty)$.

Däremot är till exempel $f(1) > f(-1)$ trots att $1 > -1$, så f är inte (strängt) växande på $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Definitionen av växande/avtagande är ibland svår att använda i praktiken, så istället använder vi ofta en följdsats till Lagranges medelvärdessats för att avgöra om en funktion är (strängt) växande/avtagande på ett intervall.

Sats (Lagranges medelvärdessats): Antag att funktionen f uppfyller:

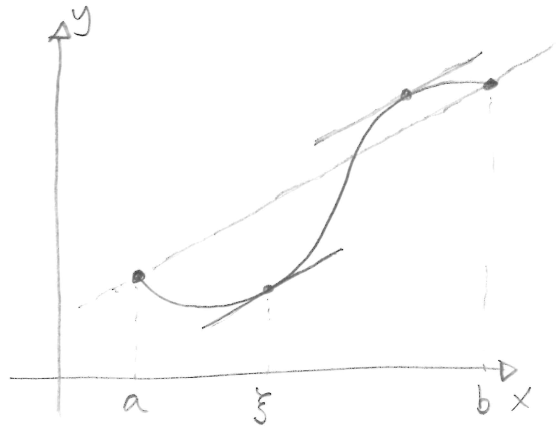
(i) f är kontinuerlig på $[a,b]$

(ii) f är deriverbar på (a,b).

Då existerar det (minst) ett $\xi \in (a,b)$ så att $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bevis: Ingår ej!

Geometriskt säger satsen att det finns något $\xi \in (a,b)$ så att lutningen i ξ är lika med funktionens medellutning på $[a,b]$.



Följdsats: Antag att f är deriverbar på ett intervall I.

Då gäller att:

(i) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ är strängt växande på I.

(ii) $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ är konstant på I.

(iii) $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ är strängt avtagande på I.

(iv) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ är växande på I.

(v) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ är avtagande på I.

Bevis: Låt $x_1, x_2 \in I$ och antag att $x_1 < x_2$. Nu är f kontinuerlig på $[x_1, x_2]$ och deriverbar på (x_1, x_2), så vi kan använda medelvärdessatsen, dvs det finns ett $\xi \in (x_1, x_2)$ sådant att $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$.

I de olika fallen får vi därför:

(i) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$,

dvs f är strängt växande på I.

(ii) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$,

dvs f är konstant på I.

(iii) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$,

dvs f är strängt avtagande på I.

(iv) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$,

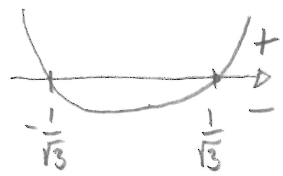
dvs f är växande på I.

(v) $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\leq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \leq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$,

dvs f är avtagande på I.

Exempel: Avgör var funktionen $f(x) = x^3 - x$ är växande respektive avtagande.

Vi deriverar f och gör en förenklad teckentabell för f'. Derivatan blir $f'(x) = 3x^2 - 1 = (\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)$, och den förenklade teckentabellen blir



Eftersom $f'(x) \geq 0$ då $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ och då $x \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ är f växande där, och eftersom $f'(x) \leq 0$ på $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ är f avtagande där.