MVE425 Matematik, del C, våren 2019, Föreläsning 11

Mårten Wadenbäck

Beräkning av sneda asymptoter

Sats: Om f är en rationell funktion, dvs $f(x)=\frac{T(x)}{N(x)}$ där $T(x)$ och $N(x)$ är polynom, så har $f(x)$ en sned asymptot då $x\to\pm\infty$ då $\text{grad}\,T \leq 1+\text{grad}\,N$.
Asymptoten ges då av $y=q(x)$, där $q(x)$ är kvotpolynomet.

Bevis: Enligt divisionsalgoritmen finns entydigt bestämda polynom $q(x)$ och $r(x)$ så att

$$T(x)=q(x)N(x)+r(x) \qquad \text{med } \text{grad}\,r<\text{grad}\,N.$$

För att $y=q(x)$ skall kunna vara en asymptot måste $\text{grad}\,q\leq 1$, och då blir (om $q(x)\neq 0$)

$$\text{grad}\,T=\text{grad}(q(x)N(x)+r(x))=\text{grad}(q(x)N(x))=$$
$$=\text{grad}\,q+\text{grad}\,N\leq 1+\text{grad}\,N.$$

Om $y=q(x)$ gäller

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-q(x)=\lim_{x\to\pm\infty} q(x)+\frac{r(x)}{N(x)}-q(x)=0,$$

så om $\text{grad}\,q\leq 1$ är $y=q(x)$ en asymptot.

Anmärkning: Om $f(x)$ är en rationell funktion är detta ofta den bästa metoden att beräkna sneda asymptoter på.

Exempel: Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \frac{x^4+x^3-6x^2}{x^3-3x^2+2x}$.

Eftersom täljarens grad är fyra och nämnarens grad är tre kommer det finnas en sned asymptot.

Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l} & = x+4 \\ x^3-3x^2+2x & x^4+x^3-6x^2 \\ & -(x^4-3x^3+2x^2) \\ & \quad 4x^3-8x^2 \\ & \quad -(4x^3-12x^2+8x) \\ & \qquad 4x^2-8x \end{array}$$

så $f(x) = x+4+\frac{4x^2-8x}{x^3-3x^2+2x}$. Eftersom

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+4) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-8x}{x^3-3x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 0$$

är $y=x+4$ asymptot då $x\to\pm\infty$ (precis enligt satsen).

Finns lodräta asymptoter? Enda möjligheterna för dessa är då $x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x^2-3x+2=0$, dvs $x=0$, $x=1$, eller $x=2$. Vi undersöker f då x går mot dessa värden, och utnyttjar att

$$f(x) = x+4+\frac{4x^2-8x}{x^3-3x^2+2x} = x+4+\frac{4x(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = x+4+\frac{4}{x-1}$$

för alla andra x. Detta ger

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+4+\frac{4}{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+4+\frac{4}{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+4+\frac{4}{\underbrace{x-1}_{<0}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+4+\frac{4}{\underbrace{x-1}_{>0}} = +\infty,$$

asymptot $x=1$ finns!

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+4+\frac{4}{x-1} = 10, \text{ och}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x+4+\frac{4}{x-1} = 10.$$

Trots att nämnaren blir noll då $x=0$, $x=1$, och $x=2$ är det bara $x=1$ som är lodrät asymptot. Sammanfattningsvis ges alla asymptoterna av $y=x+4$ och $x=1$.

Det går att bestämma asymptoter även till funktioner som inte är rationella funktioner. För att klara detta behövs ofta följande jämförelseresultat:

Sats: (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^{qx}} = 0$ om $q>0$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0$ om $q>0$.

Bevis: Ingår inte!

Satsen säger, slarvigt uttryckt, att exponentialfunktioner växer snabbare än alla polynom, som i sin tur växer snabbare än alla logaritmer (och potenser av logaritmer).

Exempel: Med hjälp av jämförelseresultatet får vi för varje heltal $k>0$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k e^x = \begin{bmatrix} t=-x \\ t\to+\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to+\infty} (-t)^k e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{e^t} = 0.$$

För att undersöka om en funktion $f(x)$ har en sned asymptot då $x\to+\infty$ tänker vi som följer (fallet $x\to-\infty$ fungerar på samma sätt)

Om $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(kx+m)=0$ måste även

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{kx}{x} - \frac{m}{x} = 0 \iff k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Därefter måste $\lim_{x\to+\infty} f(x)-kx = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{f(x)-kx-m}_{\to 0} + m = m.$

Vi får följande metod:

Steg 1: Beräkna $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Existerar detta gränsvärde blir det asymptotens k-värde. Saknas gränsvärdet finns ingen asymptot då $x\to+\infty$, och det är inte lönt att fortsätta med steg 2.

Steg 2: Beräkna $\lim_{x\to+\infty} f(x)-kx$ med värdet på k från steg 1. Existerar gränsvärdet så finns asymptoten $y=kx+m$ då $x\to+\infty$, och i annat fall finns den ej.

Exempel: Bestäm eventuella sneda asymptoter till $f(x)=\ln x$.

Eftersom $x>0$ är det bara meningsfullt att betrakta $x\to+\infty$.

Steg 1: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (enligt jämförelseresultat),

så $k=0$.

Steg 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-kx = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 0x = +\infty$, så gränsvärdet existerar inte, och alltså finns ingen asymptot då $x\to+\infty$.

Det finns alltså inga sneda asymptoter till $f(x)=\ln x$!

Exempel: Bestäm alla asymptoter till $f(x)=\dfrac{3xe^x+x-e^x-1}{e^x+1}$.

Eftersom nämnaren är $e^x+1>1$ saknas lodräta asymptoter.

Finns någon sned asymptot då $x\to+\infty$?

Steg 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3xe^x+x-e^x-1}{xe^x+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{xe^x}\left(3+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}\right)}{\cancel{xe^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = 3,$

så $k_1=3$.

Steg 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-k_1x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3xe^x+x-e^x-1}{e^x+1} - 3x =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3xe^x+x-e^x-1-3xe^x-3x}{e^x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x-e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}\left(-\frac{2x}{e^x}-1-\frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = -1,$

så $m_1=-1$.

Då $x\to+\infty$ finns alltså asymptoten $y=3x-1$.

Finns någon sned asymptot då $x\to-\infty$?

Steg 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\overset{\to 0}{3xe^x}+x-\overset{\to 0}{e^x}-1}{\underset{\to 0}{xe^x}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(3e^x+1-\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(e^x+1\right)} = 1,$

så $k_2=1$.

Steg 2: $\lim_{x\to-\infty} f(x) - k_2 x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{e^x+1} - x =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1 - xe^x - x}{e^x+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{2xe^x} - \overset{\to 0}{e^x} - 1}{\underset{\to 0}{e^x} + 1} = -1,$$

så $m_2 = -1$.

Då $x \to -\infty$ finns alltså asymptoten $y = x - 1$.

Sammanfattningsvis har $f(x)$ två asymptoter; $y = 3x - 1$ då $x \to +\infty$ och $y = x - 1$ då $x \to -\infty$.