Tentamensskrivning i matematik del E 20130604

Kurskod: LMA164
Telefonvakt: Timo Hirscher tel. 0734 40796
Tid för tentamen: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga

---

1. Beräkna följande integraler.

a) $\int x \ln x \; dx$ b) $\int_1^2 \frac{x}{x^2 - 3x - 4} \; dx$ c) $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} \; dx$ (10p)

Lösning:

a) $\int x \ln x \; dx = (\text{PI}) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

b) $\int_1^2 \frac{x}{x^2 - 3x - 4} \; dx = (\text{PBU}) = \int_1^2 (\frac{1/5}{x+1} + \frac{4/5}{x-4}) dx = \frac{1}{5} \left[\ln|x+1| + 4\ln|x-4|\right]_1^2 =$
$\frac{1}{5}(\ln 3 + 4\ln 2 - \ln 2 - 4\ln 3) = \frac{3}{5}(\ln 2 - \ln 3).$

c) $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} \; dx = \{t = 1/x, \; -\frac{1}{x^2} \, dx = \; dt\} = \int -e^t \, dt = -e^{1/x} + C.$

2. Lös differentialekvationerna

a) $y' = y^2$ b) $y' + \frac{1}{x} y = x$ c) $y'' - 3y' - 4y = x^2 - 1.$ (11p)

Lösning:

a)$y' = y^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{y \neq 0} \frac{dy}{y^2} = dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} \, dy = \int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x+C}.$

Vi ser att $y = 0$ är en lösning till DE. Denna lösning ingår ej i den allmänna lösningen, så $y = 0$ är en singulär lösning till DE.

b) Vi löser denna DE med metoden integrerande faktor. $e^{F(x)} = e^{\ln x} = x$ och får då

$$y' + \frac{1}{x}y = x \Leftrightarrow y'x + x\frac{1}{x}y = x^2 \Leftrightarrow (xy)' = x^2 \Rightarrow xy = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow y = \frac{x^2}{3} + C/x.$$

c) KE: $r^2 - 3r - 4y = 0$ har lösningarna $r_1 = -1$ och $r_2 = 4$. Den homogena lösningen blir då

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}.$$

För att finna partikulärlösningen ansätter vi

$$y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b \Rightarrow y_p'' = 2a.$$

Insättning i DE och identifiering av konstantarna ger $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{8}$,$c = -\frac{5}{32}$.

y_p blir då

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{5}{32}.$$

Alltså har vi

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{5}{32}.$$

3. a) Skriv summan $101 + 102 + 103 + ... + 199$ med summabetckning (2p)

Lösning:

$$\sum_{k=101}^{199} k$$

b) Visa att

$$101 + 102 + 103 + ... + 199 = 3(1 + 2 + 3 + ... + 99)$$

(3p)

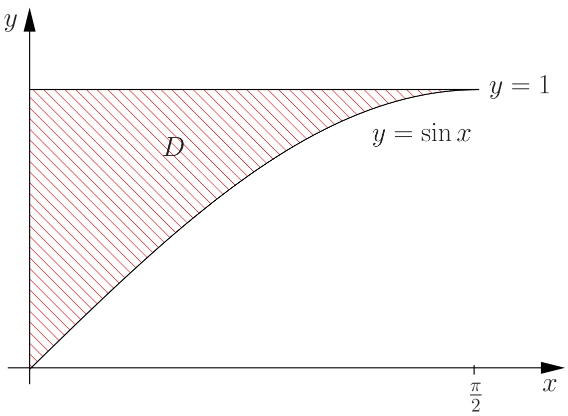
Lösning:

VL$=\sum_{k=101}^{199} k = 99 \cdot \frac{101+199}{2} = 99 \cdot 150$ och HL$=3\sum_{k=1}^{99} k = 3 \cdot 99 \cdot \frac{1+99}{2} = 99 \cdot 150$.

4. Bestäm volymen av den kropp som alstras då området som ges av $\sin x \leq y \leq 1$ och $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ roterar kring $x-$ axeln.

Lösning:

Området D i figuren till höger som vi ska låta rotera kring $x-$ axeln.



Rotationsvolymen blir då

$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \ dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ dx = \dfrac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \ dx = \dfrac{\pi^2}{4}.$ (5p)

5. Radioaktivt sönderfall beskrivs matematiskt med differentialekvationen

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N,$$

där N är mängden radioaktiva atomer och λ är sönderfallskonstanten. Bestäm konstanten λ då halveringstiden är T. (5p)

Lösning:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N \Leftrightarrow \int \frac{1}{N}\, dn = -\int \lambda\, dt$$

som har den allmänna lösningen

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Med $N(0) = N_0$ får vi

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Vi vill bestämma λ då $N(T) = \frac{1}{2} N_0$ och får då följande ekvation att lösa

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T}$$

vilket ger oss

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

6. Antag att en partikel, som från början är i vila, rör sig längs $x-$ axeln och att dess acceleration ges av funktionen $a(t) = 12t^2 - 4,\ t \geq 0$. Vidare vet vi att $s(1) = 3$, där $s(t)$ är patikelns läge efter t sekunder. Bestäm den totala sträckan partikeln har rört sig från $t = 0$ till $t = 2$ sekunder. (6p)

   Lösning:

   Vi söker $s(t)$ och har givet från texten att $v(0) = 0$ (då partikeln är i vila) och att $s(1) = 3$.

   Vi bestämmer först $v(t)$ genom

$$v(t) = \int a(t)\ dt = \int (12t^2 - 4)\ dt = 4t^3 - 4t + C.$$

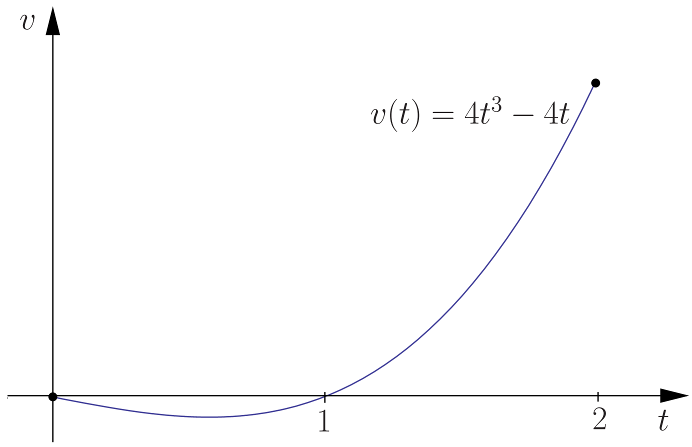
$$v(0) = 0 \text{ ger } C = 0$$

   och vi får

$$v(t) = 4t^3 - 4t.$$

   Om vi skisserar $v(t)$ ser vi att
   $v < 0$ då $0 < t < 1$ vilket innebär att
   partikeln rör sig åt vänster(bakåt)och att
   $v > 0$ då $1 < t \leq 2$ vilket innebär att

partikeln rör sig åt höger(framåt).



Vi bestämmer nu $s(t)$ genom

$$s(t) = \int v(t)\ dt = \int (4t^3 - 4t)\ dt = t^4 - 2t^2 + C.$$

$$s(1) = 3 \text{ ger } C = 4$$

och vi får

$$s(t) = t^4 - 2t^2 + 4.$$

Vi har då att

$$s(0) = 4 \qquad s(1) = 3 \qquad s(2) = 12.$$

Den sökta totala sträckan blir då

$$s = |s(1) - s(0)| + |s(2) - s(1)| = |3 - 4| + |12 - 3| = 10 \text{ m}.$$

7. Härled lösningsformeln till en linjär differentialekvation av första ordningen d.v.s. en DE av typen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)

8. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)