Tentamensskrivning i matematik del E 20140520

Kurskod: LMA164
Telefonvakt: Jonny Lindström tel. 0733 607040
Tid för tentamen: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga

---

1. Beräkna följande integraler.

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+8}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx.$ (10p)

   Lösning:

   a)
   $$\int \frac{x}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{x}{(x+4)(x+2)}\,dx = \text{PBU} = \int (\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+2})\,dx =$$
   $$\int (\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2})\,dx = 2\ln|x+4| - \ln|x+2| + C.$$

   b)
   $$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

   c)
   $$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left[\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 dx = 2t\,dt\right] = \int \sin t\cdot 2t\,dt =$$
   $$-\cos t\cdot 2t + \int \cos t\cdot 2\,dt = -\cos t\cdot 2t + 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

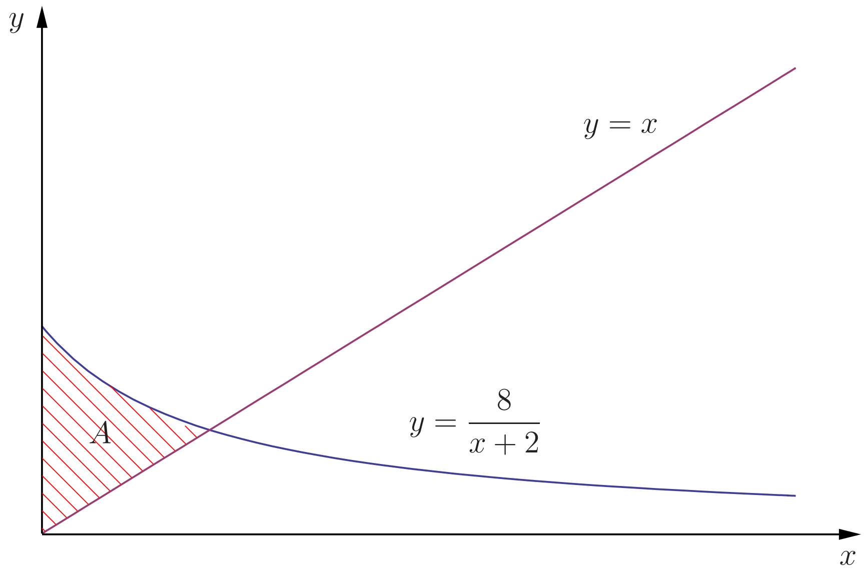
2. Kurvorna

   $$y = \frac{8}{x+2},\ \ x \geq 0 \quad \text{och} \quad y = x,\ \ x \geq 0$$

   avgränsar tillsammans med $y-$ axeln ett begränsat område. Beräkna arean av detta område. Rita figur! (5p)

Lösning:

Vi börjar med att rita en figur



och räknar sedan ut skärningspunkten mellan kurvorna som vi får till $x = 2$.

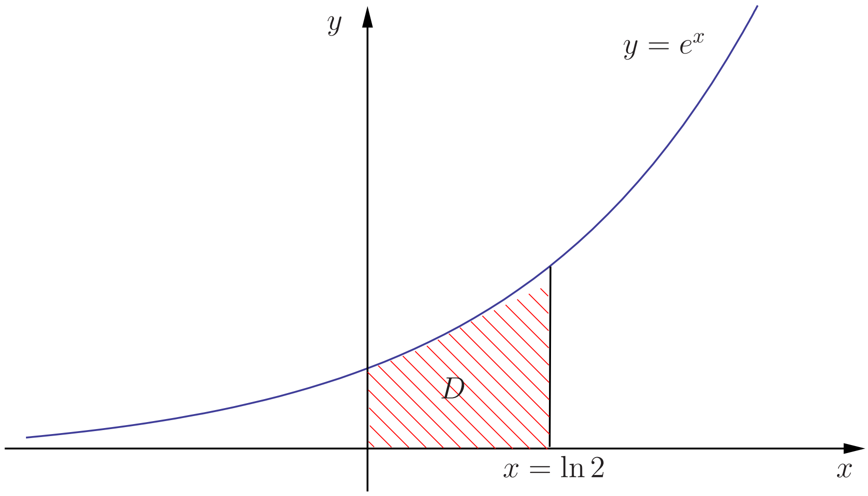
Arean blir då

$$A = \int_0^2 (\frac{8}{x+2} - x)\, dx = ... = 2(4\ln 2 - 1)a.e.$$

3. Området $0 \leq y \leq e^x$ och $0 \leq x \leq \ln 2$ roteras ett varv krin $x-$ axeln. Beräkna rotationskroppens volym. Rita figur! (4p)

Lösning:

Vi börjar med att rita en figur



Volymen som bildas då området D roterar ett varv kring $x-$ axeln blir då

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln 2} = \frac{3\pi}{2}.$$

4. Visa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \; n \geq 1.$ (5p)

Lösning:

I(induktionsstarten): Visa $U(1)$ sann.

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 2 \text{ och } HL = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2. \text{ Ok!}$$

II(induktionsantagandet): Antag $U(p)$ sann för något $p \geq 1$.

$$U(p): \qquad \sum_{k=1}^{p} k(k+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}$$

III: Visa att $U(p)$ sann $\Rightarrow U(p+1)$ sann.

$$U(p+1): \qquad \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$$

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{p} k(k+1) + (p+1)(p+2) \\
&= (\text{ind.ant.}) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + (p+1)(p+2) \\
&= \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + \frac{3(p+1)(p+2)}{3} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} \\
&= HL_{p+1}.
\end{aligned}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen följer att $U(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

5. Lös differentialekvationerna

   a) $y' = e^y \sin x,\ y(\pi) = 0$ b) $xy' + y = xe^{x^2},\ x > 0,\ y(1) = e.$ (8p)

   Lösning:

   a)

   $y' = e^y \sin x$ är en separabel DE $\int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx$ som har lösningen
   $e^{-y} = \cos x + C$. Villkoret $y(\pi) = 0$ ger $C = 2$ och vi har att
   $y = -\ln(\cos x + 2)$

   b)

   $xy' + y = xe^{x^2} \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$. IF$=e^{\ln x} = x$ och vi får
   $(xy)' = xe^{x^2} \Leftrightarrow xy = \frac{e^{x^2}}{2} + C \Leftrightarrow y = \frac{e^{x^2}}{2x} + C/x$. Villkoret $y(1) = e$ ger $C = e/2$.
   Alltså: $y = \frac{e^{x^2} + e}{2x}$.

6. Då dagsljuset tränger ner i en sjö avtar ljusets intensitet $I(x)$ med djupet x under vattenytan enligt Lamberts lag:
   $$\frac{dI}{dx} = -kI$$
   där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $I(x)$ om ljusintensiteten är $I(0) = I_0$ vid ytan och $I(1) = 0.4I_0$ på 1 meters djup. (5p)

Lösning:

Vi skriver (DE) som

$$I' + kI = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen. I.F $e^{F(x)} = e^{kx}$. multiplicerar vi båda leden med e^{kx} får vi

$$I'e^{kx} + ke^{kx}I = 0 \Leftrightarrow (Ie^{kx})' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$Ie^{kx} = C \Leftrightarrow I(x) = Ce^{-kx}.$$

Vi har att $I(0) = I_0$ vilket ger oss $C = I_0$ och vi får då

$$I(x) = I_0 e^{-kx}.$$

På 1 meters djup har vi att $I(1) = 0.4I_0$ vilket efter insättning ger oss

$$I_0 e^{-k\cdot 1} = 0.4I_0 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = -\ln\frac{2}{5}.$$

Sökt funktion blir då

$$I(x) = I_0 e^{\ln\frac{2}{5}t} = I_0(\frac{2}{5})^x.$$

7. För vilka värden på x är serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(2x)^k$ konvergent? För vilka värden på x blir seriens summa lika med 2? (5p)

Lösning:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(2x)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(2x)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(2x)^2(2x)^{k-1} = \frac{(2x)^2}{1-2x}$$

då $-1 < 2x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Återstår nu att lösa ekvationen

$$\frac{(2x)^2}{1-2x} = 2$$

som har lösningarna

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \text{och} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

där endast x_1 ligger inom konvergensintervallet.

8. Härled lösningsformeln till en linjär differentialekvation av första ordningen d.v.s. en DE av typen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)