

MVE425 del D / LMA164 del E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 32 resp. 42 poäng.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

1. Beräkna följande integraler. (9p)

$$(a) \int x \sin 2x \, dx \qquad (b) \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx \qquad (c) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

2. Skriv den geometriska serien $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ med summabeteckning. Hitta ett tal x så att serien blir konvergent med summan 4. (5p)

3. Visa med induktion att (5p)

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2, \quad n \geq 1$$

4. Beräkna arean som begränsas av kurvorna $y = e^{-x}$, $y = e^x$, och $y = e^{2x-1}$. (6p)
(Tips: börja med att rita figur.)

5. Lös differentialekvationerna (12p)

$$(a) y' = y^2 e^x \qquad (b) y' - \frac{y}{x} = x^2 \qquad (c) y'' + 5y' + 6y = 2x^2 + 3$$

6. Ett föremål med massan 1 kg faller fritt mot marken under inverkan av två krafter: gravitationskraften $F_g = mg$ och en friktionskraft $F_f = -kv$, där v betecknar fallhastigheten av föremålet i m/s och proportionalitetskonstanten $k = 1$ kg/s. För enkelhets skull antar vi att gravitationskonstanten ges av $g = 10$ m/s². (5p)

(a) Använd Newtons andra lag $F = ma$ (m är massan och a är accelerationen) för att ställa upp en differentialekvation för hastigheten v som funktion av tiden t .

(b) Föremålet släpps vid tiden $t = 0$ (dvs vid den tidpunkten är $v = 0$). Vad blir hastigheten efter att föremålet har fått falla under lång tid? (Alltså, vad blir gränsvärdet av $v(t)$ då $t \rightarrow \infty$?)

7. Areasatsen säger att om $f(x)$ är positiv och kontinuerlig i ett intervall I , och $A(x)$ betecknar arean under grafen från $x_0 \in I$ till $x \in I$ där $x \geq x_0$, då är $A'(x) = f(x)$. Bevisa detta. (4p)

8. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)

Lycka till!
Klas M