MVE425 del D/LMA164 del E

---

1. Beräkna följande integraler (9p)

(a) $\int (3x^2+1)\ \arctan x\ dx$ (b) $\int \frac{1}{x\ (\ln x)^3} dx$ (c) $\int \frac{x+4}{x^2-8x+12}\ dx$

Lösning (a) Här används partiell integration, varvid $3x^2+1$ integreras och $\arctan x$ deriveras:

$$\int (3x^2+1)\ \arctan x\ dx = (x^3+x)\arctan x\ - \int \frac{x^3+x}{x^2+1}\ dx = (x^3+x)\arctan x\ - \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}\ dx$$

$$= (x^3+x)\arctan x\ - \int x dx = (x^3+x)\arctan x - x^2/2 + C.$$

(b) Substitutionen $t = \ln x$ ger $dt/dx = 1/x$, dvs $dt = \frac{1}{x}dx$, så

$$\int \frac{1}{x\ (\ln x)^3} dx = \int \frac{1}{t^3} dt = -t^{-2}/2 + C = -(\ln x)^{-2}/2 + C.$$

(c) Nämnaren har faktoriseringen $x^2-8x+12 = (x-6)(x-2)$, så vi gör partialbråksuppdelningen

$$\frac{x+4}{x^2-8x+12} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x-2}.$$

På gemensamt bråkstreck blir detta

$$\frac{x+4}{x^2-8x+12} = \frac{Ax-2A+BX-6B}{x^2-8x+12} = \frac{(A+B)x+(-2A-6B)}{x^2-8x+12}$$

varur fås $A+B=1$ och $-2A-6B=4$, vilket ger $A=5/2$ och $B=-3/2$. Därför är

$$\int \frac{x+4}{x^2-8x+12}\ dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-6}\ dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-2}\ dx = \frac{5}{2}\ln(x-6) - \frac{3}{2}\ln(x-2) + C.$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av linjen $y = 2x-1$ och kurvan $y = 2-x^2$. (4p)

Lösning Intervallets ändpunkter är där kurvan och linjen skär varandra, dvs där $2x-1 = 2-x^2$, dvs $x^2+2x-3=0$, som har lösningarna $x=-3$ och $x=1$. Innanför detta intervall är $2-x^2 > 2x-1$ (rita figur, eller ta t ex $x=0$ som testpunkt). Arean (i areaenheter) blir

$$\int_{-3}^{1} (2-x^2)-(2x-1)\ dx = \int_{-3}^{1} 3-x^2-2x\ dx = \left[3x - x^3/3 - x^2\right]_{-3}^{1} = 5/3-(-9) = 32/3.$$

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $y' + 3x^2y = e^{-x^3}\sin x$ under villkoret $y(0)=3$.

(b) $y' + x^2y^2 = 0$.

(c) $y'' - 6y' + 9y = \cos x$.

Lösning (a) Denna ekvation är linjär och den integrerande faktorn är e^{x^3}, eftersom x^3 är primitiv funktion till $3x^2$. Detta ger

$$e^{x^3} y = \int e^{x^3} e^{-x^3} \sin x \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

vilket ger $y = (C - \cos x)e^{-x^3}$. Insättning av $y(0) = 3$ ger $(C - \cos 0)e^0 = C - 1 = 3$, dvs $C = 4$. Svaret blir alltså $y = (4 - \cos x)e^{-x^3}$.

(b) Denna ekvation är separabel: om $y \neq 0$ fås

$$\frac{1}{y^2} y' = -x^2$$

vilket integreras till

$$\int \frac{1}{y^2} \, dy = -\int x^2 \, dx$$

dvs

$$-\frac{1}{y} = -x^3/3 + C = -\frac{x^3 + D}{3}$$

vilket ger

$$y = \frac{3}{x^3 + D}.$$

Vilket är lösningen då $y \neq 0$. Även $y = 0$ uppfyller ekvationen och är en lösning.

(c) Vi hittar först allmän lösning till den homogena ekvationen $y'' - 6y' + 9y = 0$, som har karakteristisk ekvation $r^2 - 6r - 9 = 0$, med dubbelrot $r = 3$. Lösningen blir därför $(Ax + B)e^{3x}$, där A och B är konstanter. Som partikulärlösning till $y'' - 6y' + 9y = \cos x$ ansätter vi $y = C \cos x + D \sin x$, där C och D ska bestämmas. För att göra det beräknar vi $y' = -C \sin x + D \cos x$ och $y'' = -C \cos x - D \sin x$. Insättning i ekvationen ger

$$-C \cos x - D \sin x - 6(-C \sin x + D \cos x) + 9(C \cos x + D \sin x) = \cos x.$$

Skriver vi alla cosinus- och sinustermer tillsammans var för sig, får vi

$$(-C - 6D + 9C) \cos x + (-D + 6C + 9D) \sin x = \cos x \iff (8C - 6D) \cos x + (6C + 8D) \sin x = 1 \cos x + 0 \sin x$$

varur $8C - 6D = 1$ och $6C + 8D = 0$. Detta ekvationssystem har lösningen $C = 4/50$ och $D = -3/50$. Differentialekvationen har därför sammanlagt lösningen

$$y = (Ax + B)e^{3x} + \frac{1}{50}(4 \cos x - 3 \sin x)$$

4. Seidon tar med sig en kopp kaffe till föreläsningen. Kaffet blir kallare och kallare, och dess temperatur (i grader Celsius) vid tiden t (minuter) ges av $T(t)$. Enligt Newtons avsvalningslag är (6p)

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L),$$

där T_L är temperaturen i luften, som är konstant, och a är en positiv konstant.

(a) När föreläsningen börjar (vid $t = 0$) är kaffets temperatur 90°. Bestäm en formel för $T(t)$ om du vet att temperaturen T_L i luften är 20°.

(b) Bestäm konstanten a om du vet att kaffets temperatur efter 10 minuter är 70°.

(c) Antag att föreläsningen aldrig tar slut. Vad går temperaturen mot efter lång tid (då $t \to \infty$)? Beräkna detta och kommentera varför det är rimligt.

Lösning (a) Vi ska lösa differentialekvationen ovan, som är linjär (och separabel). Ekvationen kan skrivas som $T' + aT = aT_L$, med integrerande faktor e^{at}. Lösningen är därför

$$T(t) = e^{-at} \int aT_L e^{at} dt = e^{-at} T_L \int a e^{at} dt = e^{-at} T_L (e^{at} + C) = T_L(1 + Ce^{-at}),$$

och $T_L = 20$ ger $T(t) = 20(1 + Ce^{-at})$. Konstanten C bestäms ur villkoret $T(0) = 90$, vilket ger $90 = 20(1 + Ce^0) = 20(1 + C)$, så $C = 90/20 - 1 = 70/20$. Detta ger

$$T(t) = 20(1 + \frac{70}{20} e^{-at}) = 20 + 70e^{-at}.$$

(b) Vi har $T(10) = 70$, dvs

$$20 + 70e^{-10a} = 70 \Longleftrightarrow 70e^{-10a} = 50 \Longleftrightarrow e^{-10a} = \frac{5}{7} \Longleftrightarrow -10a = \ln \frac{5}{7} \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{10} \ln \frac{5}{7},$$

dvs $a = \frac{1}{10} \ln \frac{7}{5}$.

(c) Då $t \to \infty$ gäller $e^{-at} \to 0$ ty $a > 0$. Därför gäller $T(t) = 20 + 70e^{-at} \to 20$ då $t \to \infty$. Detta är *rimligt*, eftersom det är rimligt att kaffet efter lång tid får samma temperatur som luften ($T_L = 20$).

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal n gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n} 3k(k-1) = (n-1)n(n+1).$$

Lösning *Basfall $n = 1$:* Vänsterledet är $3 \cdot 1 \cdot (1 - 1) = 0$ och högerledet är $(1 - 1) \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 0$, så påståendet är sant för $n = 1$.

Induktionsantagande (IA): Antag att det för $p \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) = (p-1)p(p+1).$$

Induktionssteg: Vi ska visa att

$$\sum_{k=1}^{p+1} 3k(k-1) = ((p+1)-1)(p+1)((p+1)+1) = p(p+1)(p+2).$$

Vänsterledet är

$$\sum_{k=1}^{p+1} 3k(k-1) = \sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) + 3(p+1)(p+1-1) = \sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) + 3p(p+1),$$

vilket enligt IA är lika med

$$(p-1)p(p+1) + 3p(p+1) = (p-1+3)p(p+1) = (p+2)p(p+1)$$

vilket är lika med högerledet. Induktionsbeviset är fullbordat.

6. Skriv den geometriska serien $2\cos v + 4\cos^2 v + 8\cos^3 v + \cdots$ med summatecken, och avgör för vilka v med $0 \leq v \leq \pi$ som serien är konvergent. (5p)

Lösning Ett sätt att skriva denna serie med summatecken (det finns flera korrekta sätt) är

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2\cos v)^k.$$

Detta är en geometrisk serie med kvot $q = 2\cos v$, och är därför enligt sats konvergent om och endast om $|q| < 1$, dvs om och endast om $-1 < 2\cos v < 1$, dvs $-\frac{1}{2} < \cos v < \frac{1}{2}$. Då $0 \leq v \leq \pi$ gäller detta om och endast om $\frac{\pi}{3} < v < \frac{2\pi}{3}$.

7. Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall I och om $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på I, så är $G(x) = F(x) + C$ för något $C \in \mathbb{R}$. (4p)

Lösning Se boken.

8. Härled lösningsformeln för en linjär differentialekvation på formen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)
Lösning Se boken.