

MVE425 del D/LMA164 del E

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Skriv tydliga, utförliga lösningar.

För godkänt på tentan (betyg 3) krävs minst 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs minst 32 resp. 42 poäng.

Lösningarna läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok. *Lycka till!*

1. Beräkna följande integraler (9p)

$$(a) \int (3x^2 + 1) \arctan x \, dx \quad (b) \int \frac{1}{x (\ln x)^3} dx \quad (c) \int \frac{x + 4}{x^2 - 8x + 12} dx$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av linjen $y = 2x - 1$ och kurvan $y = 2 - x^2$. (4p)

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $y' + 3x^2y = e^{-x^3} \sin x$ under villkoret $y(0) = 3$.

(b) $y' + x^2y^2 = 0$.

(c) $y'' - 6y' + 9y = \cos x$.

4. Seidon tar med sig en kopp kaffe till föreläsningen. Kaffet blir kallare och kallare, och dess temperatur (i grader Celsius) vid tiden t (minuter) ges av $T(t)$. Enligt Newtons avsvälningsslag är (6p)

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L),$$

där T_L är temperaturen i luften, som är konstant, och a är en positiv konstant.

(a) När föreläsningen börjar (vid $t = 0$) är kaffets temperatur 90° . Bestäm en formel för $T(t)$ om du vet att temperaturen T_L i luften är 20° .

(b) Bestäm konstanten a om du vet att kaffets temperatur efter 10 minuter är 70° .

(c) Antag att föreläsningen aldrig tar slut. Vad går temperaturen mot efter lång tid (då $t \rightarrow \infty$)? Beräkna detta och kommentera varför det är rimligt.

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal n gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^n 3k(k-1) = (n-1)n(n+1).$$

6. Skriv den geometriska serien $2 \cos v + 4 \cos^2 v + 8 \cos^3 v + \dots$ med summatecken, och avgör för vilka v med $0 \leq v \leq \pi$ som serien är konvergent. (5p)

7. Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall I och om $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på I , så är $G(x) = F(x) + C$ för något $C \in \mathbb{R}$. (4p)

8. Härled lösningsformeln för en linjär differentialekvation på formen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)