MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-06-03 kl. 14.00–18.00

MVE425 del D/LMA164 del E

---

1. Beräkna följande integraler (9p)

$$\text{(a)} \int x^2 \ln(x^3)\ dx \qquad \text{(b)} \int \frac{x}{x^2+8x+16}\ dx \qquad \text{(c)} \int x^2 \cos x\ dx$$

Lösning (a) Substitutionen $t = x^3$ ger $dt/dx = 3x^2$, dvs $\frac{1}{3}dt = x^2 dx$, så

$$\int x^2 \ln(x^3)\ dx = \frac{1}{3}\int \ln t dt = \frac{1}{3}(t\ln t - t + C) = \frac{1}{3}(x^3\ln(x^3) - x^3 + C),$$

där integralen till $\ln t$ antingen ses som standardintegral eller tas fram med partiell integration.
(b) Nämnaren har dubbelrot -4 och är lika med $(x+4)^2$. Substitutionen $t = x+4$ ger $x = t-4$ och $dt = dx$, så

$$\int \frac{x}{x^2+8x+16}dx = \int \frac{x}{(x+4)^2}dx = \int \frac{t-4}{t^2}dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{4}{t^2}\right) dt = \ln|t| - \frac{4}{t} + C = \ln|x+4| - \frac{4}{x+4} + C.$$

(Ett annat sätt att lösa problemet är med partialbråksuppdelningen $\frac{x}{(x+4)^2} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x+4)^2}$.)
(c) Partiell integration, där x^2 deriveras och $\cos x$ integreras, ger

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\ dx$$

varvid partiell integration en gång till, där $2x$ deriveras och $\sin x$ integreras, ger

$$x^2\sin x - \int 2x\sin x\ dx = x^2 \sin x - \left(2x(-\cos x) - \int 2(-\cos x)\ dx\right) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\, dx$$

vilket slutligen integreras till $x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.

2. Betrakta området som begränsas av kurvorna $y = 1/x$ och $y = x$ och där $1 \le x \le e$. (6p)

(a) Beräkna arean av detta område.
(b) Beräkna volymen som uppstår då området roteras runt x-axeln.

Lösning På intervallet är $x \le 1/x$ eftersom $x > 1$.
(a) Arean blir då

$$\int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x|\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \ln e - \left(\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{e^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2-3}{2}.$$

(b) Rotationsvolymen blir

$$\pi\int_1^e x^2 dx - \pi\int_1^e \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^e = \pi\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{e} - 1\right) = \pi\left(\frac{e^3-4}{3} + \frac{1}{e}\right).$$

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $y' + x^3 e^y = 0$.

(b) $y' + y = x + 1$.

(c) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 2$.

Lösning (a) Denna ekvation är separabel och vi har

$$-\frac{1}{e^y}\frac{dy}{dx} = x^3$$

varur

$$\int -e^{-y}dy = \int x^3 dx.$$

Integrationen ger

$$e^{-y} = \frac{x^4}{4} + C$$

varur

$$y = -\ln\left(\frac{x^4}{4} + C\right).$$

(b) Denna ekvation är linjär och den integrerande faktorn är e^x, då x är primitiv funktion till 1. Detta ger, med partiell integration, att

$$e^x y = \int (x+1)e^x \, dx = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

varur

$$y = e^{-x}(xe^x + C) = x + Ce^{-x}.$$

(c) Vi tar först fram allmän lösning till den homogena ekvationen $y'' + 3y' + 2y = 0$, som har karakteristisk ekvation $r^2 + 3r + 2 = 0$, med de två reella rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = -2$. Lösningen blir därför $Ae^{-x} + Be^{-2x}$, där A och B är konstanter. Som partikulärlösning ansätter vi ett polynom. Eftersom högerledet är ett polynom av grad 1 och den lägsta förekommande derivatan är funktionen y själv, ansätter vi ett allmänt förstagradspolynom $y = Cx + D$, där C och D ska bestämmas. För att göra det beräknar vi $y' = C$ och $y'' = 0$. Insättning i ekvationen ger

$$0 + 3C + 2(Cx + D) = 4x - 2.$$

Koefficienten framför x är $2C$ i vänsterledet och 4 i högerledet, varur fås $C = 2$. Den konstanta termen är $3C + 2D$ i vänsterledet och -2 i högerledet. Eftersom $C = 2$ måste då $6 + 2D = -2$, varur $D = -4$. Den sammanlagda lösningen blir $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + 2x - 4$

4. På ett bankkonto är årsräntan 1%, vilket betyder att tillväxthastigheten på grund av räntan är *proportionell* mot mängden, med proportionalitetskonstant 1/100, där tiden mäts i år. Du tar dessutom ut k kronor/år från kontot. Antag att du från början har 1 000 000 kronor på det kontot. (5p)

(a) Ställ upp och lös lämplig differentialekvation för att bestämma mängden pengar på kontot vid tiden t (räknad i enheten år).

(b) Vad är det största möjliga värdet på k sådant att pengarna på kontot aldrig avtar?

Lösning (a) Kalla mängden pengar på kontot vid tiden t (mätt i år) för $y(t)$. Vi ska lösa differentialekvationen

$$y' = \frac{1}{100}y - k$$

dvs

$$y' - ry = -k$$

där $r = 1/100$. Denna är linjär med integrerande faktor e^{-rt}. Allmän lösning blir

$$y(t) = e^{rt}\int -ke^{-rt}dt = e^{rt}(\frac{k}{r}e^{-rt} + C) = \frac{k}{r} + Ce^{rt} = 100k + Ce^{t/100}.$$

Initialvillkoret $y(0) = 1000000$ ger $100k + C = 1000000$, dvs $C = 1000000 - 100k$. Svaret blir därför $y(t) = 100k + (1000000 - 100k)e^{t/100}$.

(b) Derivatan är $y'(t) = (10000 - k)e^{t/100}$. Att mängden pengar aldrig avtar betyder att derivatan alltid är positiv. Exponentialtermen är alltid positiv, så kravet blir att $10000 - k \geq 0$, dvs k är högst 10 000 kr.

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal n gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Lösning *Basfall $n = 1$:* Vänsterledet är $\frac{1}{1\cdot 2}$ och högerledet är $1/2$, så påståendet är sant för $n = 1$.

Induktionsantagande (IA): Antag att det för $p \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}.$$

Induktionssteg: Vi ska visa att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{p+2}.$$

Vänsterledet är

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)},$$

vilket enligt IA är lika med

$$\frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)}.$$

Om man ser att täljaren är lika med $(p+1)^2$ kan man förkorta bort en faktor $(p+1)$ och få $(p+1)/(p+2)$, vilket är högerledet. Om man inte ser detta kan man istället förlänga högerledet med $(p+1)$ för att få samma nämnare som vänsterledet, vilket ger

$$HL = \frac{(p+1)(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)}$$

vilket är lika med vänsterledet. Båda metoder ger att högerled är lika med vänsterled, vilket fullbordar beviset.

6. En geometrisk talföljd $a_1, a_2, \ldots$ är sådan att $a_1 = 18$ och $a_2 = 6$. Avgör om serien (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent, och bestäm i så fall dess summa.

Lösning Serien är geometrisk, så kvoten mellan två på varandra följande termer är alltid densamma. Denna kvot q kan beräknas genom $q = a_2/a_1 = 6/18 = 1/3$. Eftersom $|1/3| < 1$ följer det att serien är konvergent. Enligt formel är summan

$$a_1 \frac{1}{1-q} = 18 \frac{1}{2/3} = 27.$$

7. Bevisa integreringsregeln för partiell integration: $\int f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ dx$ (där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$). (4p)

Lösning Se boken.

8. Bevisa areaformeln $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$, där A är arean mellan kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ och de räta linjerna $x = a$ och $x = b$, givet att $f(x) \geq g(x)$ på det aktuella intervallet. (4p)
Lösning Se boken.