MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen
Examinator: Seidon Alsaody

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa
Datum: 2016-06-03 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Dawan Mustafa 073-990 09 67

MVE425 del D/LMA164 del E

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
Skriv tydliga, utförliga lösningar.
För godkänt på tentan (betyg 3) krävs minst 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs minst 32 resp. 42 poäng.
Lösningarna läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok. *Lycka till!*

---

1. Beräkna följande integraler (9p)

(a) $\displaystyle\int x^2 \ln(x^3)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+8x+16}\ dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \cos x\ dx$

2. Betrakta området som begränsas av kurvorna $y = 1/x$ och $y = x$ och där $1 \leq x \leq e$. (6p)

(a) Beräkna arean av detta område.
(b) Beräkna volymen som uppstår då området roteras runt x-axeln.

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $y' + x^3 e^y = 0$.
(b) $y' + y = x + 1$.
(c) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 2$.

4. På ett bankkonto är årsräntan 1%, vilket betyder att tillväxthastigheten på grund av räntan är *proportionell* mot mängden, med proportionalitetskonstant 1/100, där tiden mäts i år. Du tar dessutom ut k kronor/år från kontot. Antag att du från början har 1 000 000 kronor på det kontot. (5p)

(a) Ställ upp och lös lämplig differentialekvation för att bestämma mängden pengar på kontot vid tiden t (räknad i enheten år).
(b) Vad är det största möjliga värdet på k sådant att pengarna på kontot aldrig avtar?

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal n gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. En geometrisk talföljd $a_1, a_2, \ldots$ är sådan att $a_1 = 18$ och $a_2 = 6$. Avgör om serien (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent, och bestäm i så fall dess summa.

7. Bevisa integreringsregeln för partiell integration: $\int f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ dx$ (där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$). (4p)

8. Bevisa areaformeln $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$, där A är arean mellan kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ och de räta linjerna $x = a$ och $x = b$, givet att $f(x) \geq g(x)$ på det aktuella intervallet. (4p)