MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2016-08-19

MVE425 del D/LMA164 del E

---

1. Beräkna följande integraler (9p)

(a) $\int (5x+3)e^{2x}\ dx$ (b) $\int \frac{x^3}{x^4+2}\ dx$ (c) $\int \frac{2}{x^2+10x+21}\ dx$

Lösning (a) Partiell integration, där $5x+3$ deriveras och e^{2x} integreras, ger

$$\int (5x+3)e^{2x}\ dx = (5x+3)e^{2x}/2 - \int \frac{5}{2}e^{2x}\ dx = \frac{5x+3}{2}e^{2x} - \frac{5}{4}e^{2x} + C = \frac{10x+1}{4}e^{2x} + C.$$

(b) Substitutionen $t = x^4+2$ ger $dt/dx = 4x^3$, dvs $\frac{1}{4}dt = x^3 dx$, så

$$\int \frac{x^3}{x^4+2}\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln(x^4+2) + C.$$

(c) Nämnaren har rötterna -3 och -7 och är lika med $(x+3)(x+7)$. Vi gör en partialbråksuppdelning enligt $\frac{2}{(x+3)(x+7)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+7}$. På gemensamt bråkstreck ger detta

$$\frac{2}{(x+3)(x+7)} = \frac{A(x+7)+B(x+3)}{(x+3)(x+7)} = \frac{(A+B)x+7A+3B}{(x+3)(x+7)}.$$

Koefficientjämförelse ger $A+B=0$ och $7A+3B=2$. Detta ekvationssystem har lösningen $A=1/2$ och $B=-1/2$. Sammanlagt fås

$$\int \frac{2}{(x+3)(x+7)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+7}dx = \frac{1}{2}\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x+7| + C.$$

2. Området som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 2-x$ roteras runt x-axeln. Beräkna rotationsvolymen. (5p)

Lösning Kurvorna skär varandra då $x^2 = 2-x^2$, vilket ger $2x^2 = 2$. Denna ekvation har lösningarna $x=1$ och $x=-1$, och kurvan $y = 2-x^2$ är överst på intervallet $[-1,1]$. Volymen blir

$$\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx - \pi\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2)\ dx = \pi\left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\pi$$

volymsenheter.

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $x^2y' = y^2$ med villkor $y(1)=2$.

(b) $y' + 2xy = e^{x-x^2}$.

(c) $y'' + 2y' + 5y = 2e^{3x}$.

Lösning (a) Denna ekvation är separabel och vi har

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

varur

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x^2} dx.$$

Integrationen ger

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$$

varur

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - C = \frac{1 - Cx}{x}$$

så

$$y = \frac{x}{1 - Cx}.$$

Villkoret (som också utesluter lösningen $y = 0$) ger $2 = \frac{1}{1-C}$, dvs $2 - 2C = 1$, vilket ger $C = 1/2$. Lösningen blir

$$y = \frac{x}{1 - x/2}.$$

(b) Denna ekvation är linjär och den integrerande faktorn är e^{x^2}, då x^2 är primitiv funktion till $2x$. Detta ger

$$e^{x^2} y = \int e^{x-x^2} e^{x^2}\ dx = \int e^{x-x^2+x^2}\ dx = \int e^x\ dx = e^x + C$$

varur

$$y = e^{-x^2}(e^x + C).$$

(c) Vi tar först fram allmän lösning till den homogena ekvationen $y'' + 2y' + 5y = 0$, som har karakteristisk ekvation $r^2 + 2r + 5 = 0$, med de två icke-reella rötterna $-1 \pm 2i$. Lösningen blir därför $e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, där A och B är konstanter. Som partikulärlösning ansätter $y = Ce^{3x}$, där C ska bestämmas. För att göra det beräknar vi $y' = 3Ce^{3x}$ och $y'' = 9Ce^{3x}$. Insättning i ekvationen ger

$$(9 + 6 + 45)Ce^{3x} = 2e^{3x},$$

vilket ger $60C = 2$, dvs $C = 1/30$. Den sammanlagda lösningen blir

$$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{30}e^{3x}.$$

4. Ett föremål med massan m kg faller under inverkan av jordens gravitation och luftens motstånd. Föremålets fart vid tiden t är $v(t)$ m/s och uppfyller (6p)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

där k är en positiv konstant, och g är gravitationskonstanten som kan antas ha värdet 10. Föremålet släpps från vila, vilket betyder att $v(0) = 0$.

(a) Bestäm en formel för farten $v(t)$.

(b) Vad går farten mot om föremålet faller under lång tid ($t \to \infty$)?

Lösning (a) Vi ska lösa den linjära differentialekvationen ovan, som kan skrivas som $v' + \frac{k}{m}v = g$. Integrerande faktor är $e^{kt/m}$. Lösningen är därför

$$v(t) = e^{-kt/m} \int g e^{kt/m} dt = e^{-kt/m} \left(\frac{mg}{k} e^{kt/m} + C \right) = \frac{mg}{k} + Ce^{-kt/m}.$$

Villkoret $v(0) = 0$ ger $\frac{mg}{k} + C = 0$, dvs $C = -\frac{mg}{k}$. Detta ger alltså

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-kt/m} \right).$$

(b) Då $t \to \infty$ gäller $e^{-kt/m} \to 0$ ty $k > 0$ och $m > 0$. Därför gäller $v(t) \to mg/k$ då $t \to \infty$.

5. Låt a vara ett reellt tal och betrakta den geometriska serien (4p)

$$\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{8} + \cdots.$$

Avgör för vilka värden på a serien konvergerar, och beräkna summan i dessa fall.

Lösning Kvoten i den geometriska serien är $a/2$, och serien konvergerar därför om och endast om $|a/2| < 1$, dvs $-2 < a < 2$. Första termen i serien är även den $a/2$, så om serien konvergerar är summan

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{1 - (a/2)} = \frac{a}{2 - a}.$$

6. Visa med induktion att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

för varje positivt heltal n.

Lösning *Basfall $n = 1$:* Vänsterledet är $1/2^1 = 1/2$ och högerledet är $2 - 3/2^1 = 1/2$, så påståendet är sant för $n = 1$.

Induktionsantagande (IA): Antag att det för $p \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{p+2}{2^p}$$

Induktionssteg: Vi ska visa att

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{p+1+2}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}$$

Vänsterledet är

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} + \frac{p+1}{2^{p+1}},$$

vilket enligt IA är lika med

$$2 - \frac{p+2}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{2(p+2)}{2^{p+1}} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \left(\frac{2p+4}{2^{p+1}} - \frac{p+1}{2^{p+1}} \right) = 2 - \frac{2p+4-(p+1)}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}.$$

vilket är lika med högerledet. Induktionsbeviset är fullbordat.

7. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)

Lösning Se boken.

8. Visa att $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$. (4p)

Lösning Se boken.