MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-05-19 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Examinator: Thomas Bäckdahl | ankn 5325

MVE425 del D, lösningsförslag

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Skriv tydliga, utförliga lösningar. För godkänt på tentan (betyg 3) krävs minst 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs minst 32 resp. 42 poäng. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok . Lycka till!

---

1. Beräkna följande integraler (9p)

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x^3}{x^2+4}dx \qquad \text{(b)} \quad \int (2x-1)e^{3x}dx \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$$

Lösning:

(a) Polynomdivision ger

$$\int \frac{x^3}{x^2+4}dx = \int x - 2\underbrace{\frac{2x}{x^2+4}}_{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln(\underbrace{x^2+4}_{>0}) + C.$$

(b) Partialintegration ger

$$\int (\underset{\downarrow}{2x-1})\underset{\uparrow}{e^{3x}}dx = (2x-1)\tfrac{1}{3}e^{3x} - \int 2\cdot\tfrac{1}{3}e^{3x}dx = (2x-1)\tfrac{1}{3}e^{3x} - \tfrac{2}{9}e^{3x} + C$$
$$= \frac{6x-5}{9}e^{3x} + C$$

(c) Variabelbyte ger

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx = \left/ \begin{array}{c} t = \sin x \\ \frac{dt}{dx} = \cos x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right/ = \int t^{-4}dt = -\tfrac{1}{3}t^{-3} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

2. Området mellan x-axeln och $y = 3x-1$ för $1 \le x \le 2$ roteras kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym. (4p)
Lösning: Volymen blir

$$V = \int_1^2 \pi y^2 dx = \pi\int_1^2 (3x-1)^2 dx = \pi\int_1^2 9x^2 - 6x + 1dx = \pi\left[3x^3 - 3x^2 + x\right]_1^2$$
$$= \pi(3\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2 - 3\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1) = 13\pi$$

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $y' = x^3e^{-2y}$, $y(0) = 0$.
(b) $y'' - 4y = 3e^x$.
(c) $y' + 3x^2y = e^{2x-x^3}$.

Lösning:

(a) Ekvationen är separabel.

$$y' = x^3e^{-2y} \Leftrightarrow e^{2y}\frac{dy}{dx} = x^3 \Rightarrow \int e^{2y}dy = \int x^3dx \Rightarrow \tfrac{1}{2}e^{2y} = \tfrac{1}{4}x^4 + C.$$

Begynnelsevärdet ger att $y = 0$ då $x = 0$, dvs $\frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{4}0^4 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Lös ut y:

$$e^{2y} = \tfrac{1}{2}x^4 + 1 \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}x^4 + 1).$$

(b) Ekvationen är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter.
Vi börjar med den homogena ekvationen $y'' - 4y = 0$ som har karakteristisk ekvation $0 = r^2 - 4 = (r-2)(r+2)$. Rötterna är $r_1 = 2$, $r_2 = -2$, så den allmänna lösningen är $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.
Sök partikulärlösning: Vi gör ansatsen $y_p = Ae^x \Rightarrow y_p' = Ae^x, y_p'' = Ae^x$. Stoppar vi in det i differentialekvationen får vi $Ae^x - 4Ae^x = 3e^x \Rightarrow -3A = 3 \Rightarrow A = -1$ så $y_p = -e^x$.
Hela lösningen blir $y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - e^x$.

(c) Ekvationen är linjär av första ordningen. x^3 är primitiv till $3x^2$ så integrerande faktorn blir e^{x^3}. Ekvationen är ekvivalent med

$$\underbrace{e^{x^3}y' + 3x^2e^{x^3}y}_{\frac{d}{dx}(e^{x^3}y)} = \underbrace{e^{2x-x^3}e^{x^3}}_{e^{2x}} \Rightarrow e^{x^3}y = \int e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}e^{2x} + C$$

Så $y = \frac{1}{2}e^{2x-x^3} + Ce^{-x^3}$.

4. Du vill värma en frusen paj i en ugn. Pajens temperatur T mätt i $°C$ kan då beskrivas med följande differentialekvation (6p)

$$\frac{dT}{dt} = k(T_U - T)$$

där tiden t mäts i minuter, T_U är ugnens temperatur och k är en konstant.

(a) När du ställer in pajen i ugnen (vid $t = 0$) är $T = 0$ och ugnstemperaturen $120°C$. Bestäm en formel för $T(t)$.

(b) Efter 20 minuter är pajens temperatur $60°C$. Använd detta för att bestämma konstanten k.

(c) Vid vilken tid t når pajens temperatur $90°C$?

Lösning:

(a) Ekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas $T' + kT = kT_U$. Integrerade faktorn blir e^{kt} så vi får

$$\underbrace{e^{kt}T' + ke^{kt}T}_{\frac{d}{dt}(e^{kt}T)} = kT_Ue^{kt} \Rightarrow e^{kt}T = \int kT_Ue^{kt}dt = T_Ue^{kt} + C.$$

Vilket ger $T(t) = T_U + Ce^{-kt}$. Begynnelsevillkoret ger $0 = T(0) = T_U + C$, så $C = -T_U = -120$. Svar: $T(t) = 120(1 - e^{-kt})$.

(b) Villkoret ger $60 = T(20) = 120(1 - e^{-20k}) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-20k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-20k} \Rightarrow -20k = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20}$.

(c) $90 = T(t) = 120(1 - e^{-t\frac{\ln 2}{20}}) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - e^{-t\frac{\ln 2}{20}} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-t\frac{\ln 2}{20}} \Rightarrow -t\frac{\ln 2}{20} = \ln(\frac{1}{4}) = -\ln 4 = -2\ln 2 \Rightarrow t = 2 \cdot 20 = 40$, så pajens temperatur är $90°C$ efter 40 minuter.

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal n gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-1} = n2^n.$$

Lösning: Bassteget $n = 1$: $VL_1 = \sum_{k=1}^{1}(k+1)2^{k-1} = 2 = HL_1$, OK.
Induktionsantagande (IA) : $VL_p = HL_p$, dvs ekvationen stämmer för $n = p$.
Induktionssteg:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(k+1)2^{k-1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p}(k+1)2^{k-1}}_{VL_p} + (p+2)2^p \underset{(IA)}{=} \underbrace{p2^p}_{HL_p} + (p+2)2^p$$

$$= (2p+2)2^p = (p+1)2 \cdot 2^p = (p+1)2^{p+1} = HL_{p+1}.$$

Så $VL_p = HL_p$ medför $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Matematisk induktion ger att ekvationen gäller för alla heltal $n \geq 1$.

6. För vilka värden på x är den geometriska serien $8x + 8x^3 + 8x^5 + \ldots$ konvergent? För vilka värden på x blir seriens summa lika med 3? (5p)

Lösning: Serien har kvot $q = \dfrac{8x^3}{8x} = x^2$. Den är konvergent om $-1 < q < 1$, dvs om $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. För dessa x blir summan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 8x(x^2)^{k-1} = \frac{8x}{1-x^2}$. Summan blir 3 då $-1 < x < 1$ och $3 = \dfrac{8x}{1-x^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{8}{3}x \Leftrightarrow 0 = x^2 + \frac{8}{3}x - 1 = (x + \frac{4}{3}) - \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = (x + \frac{4}{3}) - (\frac{5}{3})^2 = (x + \frac{4}{3} - \frac{5}{3})(x + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}) = (x - \frac{1}{3})(x + 3)$. Roten $x = -3$ ligger inte i intervallet, så den enda lösningen är $x = \frac{1}{3}$.

7. Bevisa integreringsregeln $\displaystyle\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$ där $F(x)$ är primitiv funktion till $f(x)$. (4p)
Lösning: Se boken eller lösningsförslaget på kurshemsidan.

8. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)
Lösning: Se boken eller lösningsförslaget på kurshemsidan.