

## MVE425 del D

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Skriv tydliga, utförliga lösningar. För godkänt på tentan (betyg 3) krävs minst 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs minst 32 resp. 42 poäng. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok . Lycka till!

1. Beräkna följande integraler (9p)

$$(a) \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx \quad (b) \int (2x - 1)e^{3x} dx \quad (c) \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$$

2. Området mellan  $x$ -axeln och  $y = 3x - 1$  för  $1 \leq x \leq 2$  roteras kring  $x$ -axeln. Beräkna rotationskroppens volym. (4p)

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a)  $y' = x^3 e^{-2y}$ ,  $y(0) = 0$ .

(b)  $y'' - 4y = 3e^x$ .

(c)  $y' + 3x^2 y = e^{2x-x^3}$ .

4. Du vill värma en frusen paj i en ugn. Pajens temperatur  $T$  mätt i  $^{\circ}C$  kan då beskrivas med följande differentialekvation (6p)

$$\frac{dT}{dt} = k(T_U - T)$$

där tiden  $t$  mäts i minuter,  $T_U$  är ugnens temperatur och  $k$  är en konstant.

- (a) När du ställer in pajen i ugnen (vid  $t = 0$ ) är  $T = 0$  och ugnstemperaturen  $120^{\circ}C$ . Bestäm en formel för  $T(t)$ .

- (b) Efter 20 minuter är pajens temperatur  $60^{\circ}C$ . Använd detta för att bestämma konstanten  $k$ .

- (c) Vid vilken tid  $t$  når pajens temperatur  $90^{\circ}C$ ?

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal  $n$  gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^n (k+1)2^{k-1} = n2^n.$$

6. För vilka värden på  $x$  är den geometriska serien  $8x + 8x^3 + 8x^5 + \dots$  konvergent? För vilka värden på  $x$  blir seriens summa lika med 3? (5p)

7. Bevisa integreringsregeln  $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$  där  $F(x)$  är primitiv funktion till  $f(x)$ . (4p)

8. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)