MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-06-01 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Examinator: Thomas Bäckdahl | ankn 5325

MVE425 del D, lösningsförslag

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Skriv tydliga, utförliga lösningar. För godkänt på tentan (betyg 3) krävs minst 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs minst 32 resp. 42 poäng. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok . Lycka till!

---

1. Beräkna följande integraler (9p)

(a) $\int (x+1)\cos(2x)dx$ (b) $\int e^{2\sqrt{x}}dx$ (c) $\int \frac{4+3x}{x^2+x-6}dx$

Lösning:

(a) Partialintegration ger

$$\int \underset{\downarrow}{(x+1)}\underset{\uparrow}{\cos(2x)}dx = (x+1)\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \int \tfrac{1}{2}\sin(2x)dx = (x+1)\tfrac{1}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x) + C$$

(b) Variabelbyte och partialintegration ger

$$\int e^{2\sqrt{x}}dx = \left/ \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ \frac{dx}{dt} = 2t \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right/ = \int 2\underset{\uparrow}{e^{2t}}\underset{\downarrow}{t}dt = e^{2t}t - \int e^{2t}dt$$

$$= e^{2t}t - \tfrac{1}{2}e^{2t} + C = e^{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}) + C$$

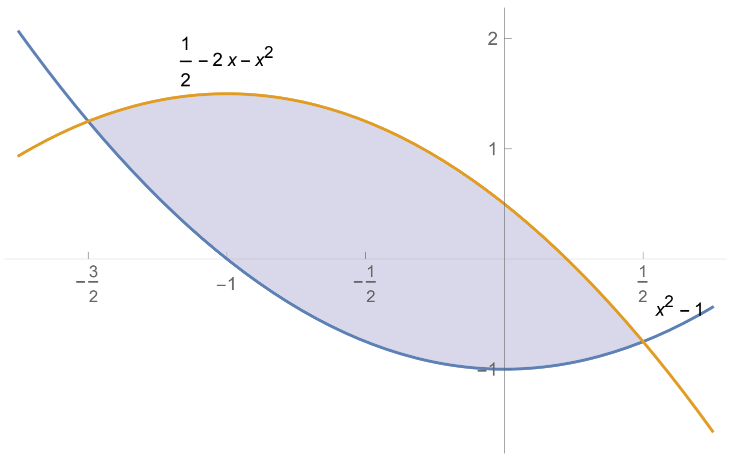
(c) Nämnaren kan faktoriseras $x^2 + x - 6 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{24}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x-2)(x+3)$. Partialbråksansatsen blir

$$\frac{4+3x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

Handpåläggning ger $A = \frac{4+6}{2+3} = 2$ och $B = \frac{4-9}{-3-2} = 1$.

$$\int \frac{4+3x}{x^2+x-6}dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3}dx = 2\ln|x-2| + \ln|x+3| + C$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 1$ och $y = \frac{1}{2} - x^2 - 2x$. (5p)
Lösning: Den första kurvan är över den andra när $x^2 - 1 \geq \frac{1}{2} - x^2 - 2x \Leftrightarrow 0 < 2x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 2(x+\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2})$, så se skär varandra vid $x = -\frac{3}{2}$ och $x = \frac{1}{2}$. Däremellan är $\frac{1}{2} - x^2 - 2x$ störst.



Den inneslutna arean blir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2} - x^2 - 2x - (x^2 - 1)dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 - x^2 + \tfrac{3}{2}x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= -\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^3 - (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{2}{3}(-\tfrac{3}{2})^3 - (-\tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{3}{2}(-\tfrac{3}{2})) = \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

3. Lös följande differentialekvationer (12p)

(a) $y'' + 4y' + 4y = 2$.

(b) $xy' - 2y = 2x^3$, $y(1) = 0$.

(c) $xyy' = 5$.

Lösning:

(a) Ekvationen är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter.
Vi börjar med den homogena ekvationen $y'' + 4y' + 4y = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $0 = r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$ som har rätter $r_1 = r_2 = -2$. Detta ger lösningarna $y_h = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.
På grund av att högerledet har gradtal 0 och lägsta derivatan är av av ordning 0 så blir ansatsen för partikulärlösningen $y_p = A$ som har $y_p' = 0$ och $y_p'' = 0$. Sätter vi in detta i differentialekvationen får vi $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Så $y_p = \frac{1}{2}$.
Svar: $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

(b) Ekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas $y' - 2x^{-1}y = 2x^2$. Integrerade faktorn blir $e^{-2\ln|x|} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$. Differentialekvationen ger då

$$\underbrace{x^{-2}y' - 2x^{-3}y}_{\frac{d}{dx}(x^{-2}y)} = 2 \quad \Rightarrow \quad x^{-2}y = \int 2dx = 2x + C \quad \Rightarrow \quad y = 2x^3 + Cx^2.$$

Begynnelsevärdet ger $0 = y(1) = 2 + C \Rightarrow C = -2$.
Svar: $y = 2x^3 - 2x^2 = 2x^2(x - 1)$.

(c) Ekvationen är separabel och kan skrivas $yy' = 5x^{-1}$ som ger $\int ydy = \int 5x^{-1}dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = 5\ln|x| + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{10\ln|x| + 2C}$.

4. Antalet myror som bor i en myrstack kan beskrivas med den så kallade logistiska modellen (6p)

$$P'(t) = rP(t)\Big(1 - \frac{P(t)}{K}\Big)$$

där $P(t) > 0$ är antal myror vid tiden t mätt i dagar, konstanten r är en reproduktionsparameter och konstanten $K > 0$ begränsar tillväxten på grund av brist på mat etc.

(a) Bestäm antal myror som bor i stacken som en funktion av tiden om man antar att antalet myror är P_0 vid $t = 0$.

(b) Hur många myror bor i stacken efter lång tid ($t \to \infty$) under samma förutsättningar som i (a)?

Lösning:

(a) Ekvationen är separabel och kan skrivas $P' = rP(1 - \frac{P}{K}) \Leftrightarrow \frac{P'}{P(1-\frac{P}{K})} = r$ om P inte är 0 eller K. Detta ger

$$\int \frac{1}{P(1 - \frac{P}{K})}dP = \int rdt = tr + C_1.$$

Vänsterledet partialbråksuppdelas med ansatsen

$$\frac{1}{P(1-\frac{P}{K})} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1-\frac{P}{K}}.$$

Handpåläggning ger $A = 1$, $B = \frac{1}{K}$. Så vi får

$$tr + C_1 = \int \frac{1}{P(1-\frac{P}{K})} dP = \int \frac{1}{P} + \frac{1}{K(1-\frac{P}{K})} dP = \int \frac{1}{P} - \frac{1}{P-K} dP$$
$$= \ln|P| - \ln|P-K| = -\ln|\frac{P-K}{P}| = -\ln|1-\frac{K}{P}|$$

Vi kan lösa ut P: $|1-\frac{K}{P}| = e^{-tr-C_1} = e^{C_1}e^{tr} \Rightarrow 1-\frac{K}{P} = \underbrace{\pm e^{-C_1}}_{C_2} e^{-tr} \Rightarrow \frac{K}{P} = 1 - C_2 e^{-tr} \Rightarrow P = \frac{K}{1-C_2e^{-tr}}$. Även fallen $P = K$ och $P = 0$ är lösningar, men vi har kravet $P > 0$.

Begynnelsevärdet ger $P_0 = P(0) = \frac{K}{1-C_2} \Rightarrow \frac{K}{P_0} = 1 - C_2 \Rightarrow C_2 = 1 - \frac{K}{P_0}$.

Alltså får vi $P(t) = \dfrac{K}{1-(1-\frac{K}{P_0})e^{-tr}}$. Detta inkluderar även fallet $P = K$.

(b) $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{K}{1-(1-\frac{K}{P_0})e^{-tr}} = K$.

5. Visa med induktion att det för varje positivt heltal n gäller att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = n(n+2)$$

Lösning: Bassteget $n = 1$: $VL_1 = \sum_{k=1}^{1}(2k+1) = 3 = HL_1$, OK.
Induktionsantagande (IA) : $VL_p = HL_p$, dvs ekvationen stämmer för $n = p$.
Induktionssteg:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(2k+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{p}(2k+1)}_{VL_p} + (2(p+1)+1) \underset{(IA)}{=} \underbrace{p(p+2)}_{HL_p} + 2p + 3$$
$$= p^2 + 4p + 3 = (p+2)^2 - 1 = (p+1)(p+3) = HL_{p+1}.$$

Så $VL_p = HL_p$ medför $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Matematisk induktion ger att ekvationen gäller för alla heltal $n \geq 1$.

6. En geometrisk talföljd $a_1, a_2, \ldots$ är sådan att $a_2 = 6$ och $a_5 = \frac{3}{4}$. Avgör om serien (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent, och bestäm i så fall dess summa.
Lösning: $a_k = a_1 q^{k-1}$ och de givna värdena ger $6 = a_2 = a_1 q$ och $\frac{3}{4} = a_5 = a_1 q^4$ så $q^3 = \frac{a_5}{a_2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ så $q = \frac{1}{2}$. $a_1 = \frac{a_2}{q} = 12$. Konvergenskravet är $-1 < q < 1$ så serien är konvergent och har summa $\frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = 24$.

7. Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall I och om $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på I, så är $G(x) = F(x) + C$ för någon konstant C. (4p)
Lösning: Se boken eller lösningsförslaget på kurshemsidan.

8. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)
Lösning: Se boken eller lösningsförslaget på kurshemsidan.