1. (a) *Alternativ 1:* Ett variabelbyte ger

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{2x+1} \\ u^2 = 2x+1 \\ x = \frac{u^2-1}{2} \\ dx = u\,du \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{u^2-1}{2}+1}{u}\,u\,du = \int \Big(\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}\Big)\,du$$
$$= \frac{u^3}{6}+\frac{u}{2}+C = \frac{u}{6}(u^2+3)+C = \frac{\sqrt{2x+1}}{6}(2x+4)+C$$
$$= \frac{(x+2)\sqrt{2x+1}}{3}+C.$$

Alternativ 2: Ett annat variabelbyte ger

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \begin{bmatrix} v = 2x+1 \\ x = \frac{v-1}{2} \\ dx = \frac{dv}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{v-1}{2}+1}{2\sqrt{v}}\,dv = \frac{1}{4}\int \frac{v+1}{\sqrt{v}}\,dv$$
$$= \frac{1}{4}\int \Big(\sqrt{v}+\frac{1}{\sqrt{v}}\Big)\,dv = \frac{1}{4}\Big(\frac{v^{3/2}}{3/2}+\frac{v^{1/2}}{1/2}\Big)+C$$
$$= \frac{v\sqrt{v}}{6}+\frac{3\sqrt{v}}{6}+C = \frac{\sqrt{v}}{6}(v+3)+C$$
$$= \frac{\sqrt{2x+1}}{6}(2x+4)+C = \frac{(x+2)\sqrt{2x+1}}{3}+C.$$

Svar: Integralen blir $\dfrac{(x+2)\sqrt{2x+1}}{3}+C$.

(b) Partialintegration ger

$$\int (1-3x)e^{-x}\,dx = -(1-3x)e^{-x} - \int 3e^{-x}\,dx$$
$$= -(1-3x)e^{-x}+3e^{-x}+C = (3x+2)e^{-x}+C$$

Svar: Integralen blir $(3x+2)e^{-x}+C$.

(c) Vi har att göra med en rationell funktion, och täljarpolynomets grad är lägre än nämnarpolynomets (vi slipper polynomdivisionen här). För att faktorisera nämnaren gissar vi roten $x = 1$ och utför polynomdivision (här slapp vi inte undan):

$$\begin{array}{r|l} & = x^2+1 \\ \hline x-1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & -(x^3-x^2) \\ \hline & \quad 0 + x - 1 \\ & \qquad -(x-1) \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Faktorisering av nämnaren i reella faktorer ger alltså

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1),$$

där x^2+1 saknar reella nollställen. En lämplig ansats för partialbråk är

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+E}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+B(x^2-x)+E(x-1)}{(x-1)(x^2+1)},$$

där identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ \text{konstant}: \end{array} \quad \begin{cases} A+B & =0 \\ \quad -B+E & =0 \\ A \quad -E & =2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B & = \ 0 \\ \quad -B+E & = \ 0 \\ \quad B+E & =-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B & = \ 0 \\ \quad -B+E & = \ 0 \\ \quad 2E & =-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = & 1 \\ B = & -1 \\ E = & -1. \end{cases}$$

Integralen ges nu av

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \ln|x-1| - \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \arctan x + C. \end{aligned}$$

Svar: Integralen blir $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \arctan x + C$.

2. Vi betecknar

$$VL(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)3^k \qquad \text{och} \qquad HL(n) = n3^{n+1},$$

och låter $U(n)$ vara utsagan (påståendet) att $VL(n) = HL(n)$.

Eftersom $VL(1) = (2\cdot 1+1)3^1 = 3^{1+1} = HL(1)$ är $U(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall*.

Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $U(p) \Rightarrow U(p+1)$. Antag därför att $U(p)$ är sann för något visst p, dvs att $VL(p) = HL(p)$. Det gäller nu att

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1}(2k+1)3^k = (2(p+1)+1)3^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(2k+1)3^k \\ &= (2p+3)3^{p+1} + VL(p) = (2p+3)3^{p+1} + HL(p) \\ &= (2p+3)3^{p+1} + p3^{p+1} = (3p+3)3^{p+1} = (p+1)3^{p+2} = HL(p+1), \end{aligned}$$

där de förgyllda uttrycken ovan är lika enligt antagandet att $U(p)$ är sann. Vi har nu funnit att $U(p+1)$ är sann så fort $U(p)$ är sann, dvs induktionssteget $U(p) \Rightarrow U(p+1)$ gäller.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $U(n)$ är sann för alla heltal $n \geq 1$.

3. Vi avläser första termen $a_1 = x$ och får seriens kvot till $q = \frac{2}{x}$, så att $a_n = a_1 q^{n-1}$. Serien kan nu skrivas

$$x + 2 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} x\left(\frac{2}{x}\right)^{k-1},$$

och satsen om geometriska serien säger att om $-1 < \frac{2}{x} < 1$ så är serien konvergent och har summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x\left(\frac{2}{x}\right)^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = \frac{x^2}{x-2}.$$

Om detta skall vara lika med 8 måste

$$\frac{x^2}{x-2} = 8 \Leftrightarrow x^2 = 8x - 16 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4,$$

och lyckligtvis är $-1 < \frac{2}{4} < 1$.

Svar: Serien skrivs $\sum_{k=1}^{\infty} x\left(\frac{2}{x}\right)^{k-1}$ och har summan 8 då $x = 4$.

4. (a) Ekvationen är separabel, och vi kan skriva om den som

$$\frac{y'}{y^2+4} = 4 - 2x,$$

eftersom det inte är farligt att dela med $y^2 + 4 > 0$. Genom att integrera båda sidor med avseende på x får vi

$$\int \frac{y'}{y^2+4}\,dx = \int (4-2x)\,dx,$$

där (vi sparar konstanten till höger sida)

$$\int \frac{y'}{y^2+4}\,dx = \left[dy = y'(x)\,dx\right] = \int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\arctan\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

och

$$\int (4-2x)\,dx = 4x - x^2 + B$$

för någon konstant B. Det gäller alltså att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) &= 4x - x^2 + B \Leftrightarrow \\
\arctan\left(\frac{y}{2}\right) &= 8x - 2x^2 + 2B \Leftrightarrow \\
\frac{y}{2} &= \tan(8x - 2x^2 + \underbrace{2B}_{=C}) \Leftrightarrow \\
y(x) &= 2\tan(8x - 2x^2 + C).
\end{aligned}$$

Svar: Funktionen ges av $y(x) = 2\tan(8x - 2x^2 + C)$, där C är en konstant.

(b) Ekvationen är lineär och av första ordningen, och vi löser den därför med metoden som bygger på *integrerande faktorn*.

Integrerande faktorn blir I.F $= e^{-2x}$, och denna skall multipliceras in på båda sidor. Detta leder till

$$\underbrace{e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y}_{\text{produktderivata}} = e^{-2x}e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) &= e^{-3x} \Leftrightarrow \\
e^{-2x}y &= \int e^{-3x}\,dx \Leftrightarrow \\
e^{-2x}y &= -\frac{e^{-3x}}{3} + C \Leftrightarrow \\
y(x) &= -\frac{e^{-x}}{3} + Ce^{2x}.
\end{aligned}$$

Svar: Funktionen ges av $y(x) = -\dfrac{e^{-x}}{3} + Ce^{2x}$, där C är en konstant.

(c) Här har vi en inhomogen lineär ekvation av ordning två med konstanta koefficienter. Alla lösningar kommer att vara på formen $y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$, där $y_{\mathrm{h}}(x)$ är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_{\mathrm{p}}(x)$ är någon partikulärlösning.

För att hitta $y_{\mathrm{h}}(x)$ löser vi *karakteristiska ekvationen*:

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Eftersom rötterna är olika blir $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

En partikulärlösning $y_{\mathrm{p}}(x)$ kan vi få på olika sätt.

Alternativ 1: Inför en *komplex hjälpekvation*,

$$z'' + 5z' + 6z = 2e^{ix},$$

där $y = \mathrm{Re}\{z\}$ och $\cos x = \mathrm{Re}\{e^{ix}\}$. Ansatsen $z_{\mathrm{p}}(x) = Ae^{ix}$ leder till $z_{\mathrm{p}}'(x) = iAe^{ix}$ och $z_{\mathrm{p}}''(x) = i^2Ae^{ix} = -Ae^{ix}$, och insatt i ekvationen blir det

$$-Ae^{ix} + 5iAe^{ix} + 6Ae^{ix} = 2e^{ix} \Leftrightarrow A(-1 + 5i + 6) = 2 \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{2}{5+5i} = \frac{2(5-5i)}{(5+5i)(5-5i)} = \frac{10-10i}{50} = \frac{1-i}{5}.$$

Alltså blir

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{Re}\{z_{\mathrm{p}}(x)\} &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1-i}{5}e^{ix}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1-i}{5}(\cos x + i\sin x)\right\} \\
&= \frac{1}{5}\mathrm{Re}\{\cos x + i\sin x - i\cos x - i^2\sin x\} = \frac{1}{5}(\cos x + \sin x).
\end{aligned}$$

Alternativ 2: Vi gör ansatsen $y_{\mathrm{p}}(x) = A\cos x + B\sin x$, som leder till

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = -A\sin x + B\cos x \quad \text{och} \quad y_{\mathrm{p}}''(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Insättning i ekvationen ger

$$-A\cos x - B\sin x + 5(B\cos x - A\sin x) + 6(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Genom att samla ihop alla cosinus respektive sinus och identifiera koefficienter får vi

$$\begin{array}{ll} \cos x: \\ \sin x: \end{array} \qquad \begin{cases} 5A + 5B = 2 \\ -5A + 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10A = 2 \\ 10B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{5}.$$

En partikulärlösning är alltså $y_{\text{p}}(x) = \frac{1}{5}(\cos x + \sin x)$.

Alla lösningar till differentialekvationen fås som

$$y(x) = y_{\text{h}}(x) + y_{\text{p}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}(\cos x + \sin x).$$

Svar: Lösningarna ges av $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \dfrac{1}{5}(\cos x + \sin x)$, där C_1 och C_2 är konstanter.

5. Volymförändringshastigheten ges av

$$V'(t) = \pi R^2 y'(t),$$

men samtidigt är

$$V'(t) = \phi_{\text{in}}(t) - \phi_{\text{ut}}(t) = -\pi r^2 \sqrt{g y(t)}.$$

Detta leder till differentialekvationen

$$\pi R^2 y'(t) = -\pi r^2 \sqrt{g y(t)}.$$

Ekvationen är separabel. Om tanken inte är tom vid tiden t så är höjden $y(t) > 0$, och vi kan då skriva

$$\pi R^2 y'(t) = -\pi r^2 \sqrt{g y(t)} \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{g}.$$

Vi integrerar båda sidor med avseende på t, och får (vi sparar konstanten till högerledet)

$$\int \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}}\, dt = \Big[dy = y'(t)\, dt\Big] = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2 \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}$$

i vänsterledet respektive $C - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{g}\, t$ i högerledet. Det återstår att lösa ut $y(t)$:

$$2\sqrt{y(t)} = C - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{g}\, t \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(C - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{g}\, t\right)^2.$$

Svar: En differentialekvation som beskriver höjden $y(t)$ är $R^2 y'(t) = -r^2 \sqrt{g y(t)}$. Lösningen till denna, tills det att cisternen blivit tömd, är $y(t) = \dfrac{1}{4}\left(C - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \sqrt{g}\, t\right)^2$ för en konstant C (som beror på hur mycket cisternen innehöll från början).

6. Rotationskroppens volym är

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^\pi y(x)^2\,dx = \pi \int_0^\pi (\sqrt{x}\sin x)^2\,dx = \pi \int_0^\pi x\sin^2 x\,dx = [\text{tipset}] \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\big(1-\cos 2x\big)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \big(x - x\cos 2x\big)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\,dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\cos 2x\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\cos 2x\,dx \\
&= \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\cos 2x\,dx = [\text{partialintegration}] \\
&= \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2}\Bigg(\underbrace{\left[\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2}\,dx\Bigg) = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2}\,dx \\
&= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi}{2}\Big(-\frac{1}{4} - \Big(-\frac{1}{4}\Big)\Big) = \frac{\pi^3}{4}.
\end{aligned}
$$

Svar: Rotationskroppens volym är $V = \dfrac{\pi^3}{4}$.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 1.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 7.