

**Examinator:** Mårten Wadenbäck

**Telefonvakt:** Adam Malik, telefon: x6792

**Hjälpmedel:** Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 32 poäng, och för betyget fem krävs minst 42 poäng. Lösningar publiceras på kurshemsidan efter skrivningen. Resultatet meddelas i LADOK, och bör synas senast 2018-05-29. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

**OBS:** Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra). Motivera dina svar väl—det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

1. Beräkna följande integraler (förenkla så långt det går):

$$(a) \int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} dx, \quad (b) \int (1-3x)e^{-x} dx, \quad (c) \int \frac{2}{x^3-x^2+x-1} dx. \quad (9p)$$

2. Visa med induktion att  $\sum_{k=1}^n (2k+1)3^k = n3^{n+1}$  för alla heltal  $n \geq 1$ . (6p)

3. Skriv den geometriska serien

$$x + 2 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \dots$$

med summabeteckning, och avgör för vilket/vilka  $x$  seriens summa är 8. (5p)

4. Bestäm alla funktioner  $y(x)$  som uppfyller:

$$(a) y' = (y^2 + 4)(4 - 2x), \quad (b) y' - 2y = e^{-x}, \quad (c) y'' + 5y' + 6y = 2 \cos x. \quad (12p)$$

5. I en hög cylindrisk vattencistern med radien  $R$  finns en cirkulär öppning med radien  $r$  i botten på cisternen. Låt  $y(t)$  beteckna vattnets höjd i cisternen vid tiden  $t$ , så att vattenvolymen vid tiden  $t$  är  $V(t) = \pi R^2 y(t)$ . Enligt Torricellis lag kommer flödet ut genom hålet att vara  $\phi_{\text{ut}}(t) = \pi r^2 \sqrt{gy(t)}$ , där  $g$  är tyngdaccelerationen. Antag att inget nytt vatten fylls på i cisternen (inflödet är  $\phi_{\text{in}}(t) = 0$ ). Sätt upp en differentialekvation för höjden  $y(t)$ , och använd denna för att bestämma funktionen  $y(t)$ . Eventuella konstanter som dyker upp behöver inte bestämmas. (6p)

6. Om kurvan  $y = \sqrt{x} \sin x$  roteras kring  $x$ -axeln uppstår en rotations kropp mellan  $x = 0$  och  $x = \pi$ . Bestäm volymen av denna rotations kropp. (Tips:  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .) (4p)

7. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)

8. Bevisa integrationsregeln  $\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$ , där  $F(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$ . (4p)