Lösningar för tenta i MVE425 Matematik, del D 2018-05-31 kl. 14:00–18:00

1. (a) Ett variabelbyte, följt av partialintegration, ger

$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} u=\sqrt{x} \\ u^2 = x \\ dx = 2u\,du \end{bmatrix} = \int 2u\,e^{-u}\,du = [\text{partialintegration}] =$$
$$= -2ue^{-u} + \int 2e^{-u}\,du = -2ue^{-u} - 2e^{-u} + C =$$
$$= C - 2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}.$$

Svar: Integralen blir $C - 2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}$.

(b) Ett variabelbyte ger

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C.$$

Svar: Integralen blir $\sin u + C = \sin(\ln x) + C$.

(c) Vi har att göra med en rationell funktion, och täljarpolynomets grad är lägre än nämnarpolynomets (vi slipper polynomdivision). Faktorisering av nämnaren i reella faktorer ger $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$. En lämplig ansats för partialbråk är

$$\frac{7x+4}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{E}{x+1} = \frac{A(x^2+x) + B(x+1) + Ex^2}{x^2(x+1)},$$

där identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ \text{konstant}: \end{array} \quad \begin{cases} A + E = 0 \\ A + B = 7 \\ B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 4 \\ E = -3. \end{cases}$$

Integralen ges då av

$$\int \frac{7x+4}{x^3+x^2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x+1}\right)dx = 3\ln|x| - \frac{4}{x} - 3\ln|x+1| + C.$$

Svar: Integralen blir $3\ln|x| - \dfrac{4}{x} - 3\ln|x+1| + C$.

2. Vi betecknar

$$VL(n) = D^n\left[2xe^{2x}\right] \qquad \text{och} \qquad HL(n) = 2^n(2x+n)e^{2x},$$

och låter $U(n)$ vara utsagan (påståendet) att $VL(n) = HL(n)$.

Eftersom

$$VL(1) = D\left[2xe^{2x}\right] = 4xe^{2x} + 2e^{2x} = 2^1(2x+1)e^{2x} = HL(1)$$

är $U(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall*.

Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $U(p) \Rightarrow U(p+1)$. Antag därför att $U(p)$ är sann för något visst p, dvs att $VL(p) = HL(p)$. Det gäller nu att

$$VL(p+1) = D^{p+1}\left[2xe^{2x}\right] = D\left[D^p\left[2xe^{2x}\right]\right] = D\left[VL(p)\right] = D\left[HL(p)\right]$$
$$= D\left[2^p(2x+p)e^{2x}\right] = 2^p\cdot 2e^{2x} + 2^p(2x+p)e^{2x}\cdot 2$$
$$= 2^{p+1}(2x+p+1)e^{2x} = HL(p+1),$$

där de cinnoberröda uttrycken ovan är lika enligt antagandet att $U(p)$ är sann. Vi har nu funnit att $U(p+1)$ är sann så fort $U(p)$ är sann, dvs induktionssteget $U(p) \Rightarrow U(p+1)$ gäller.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $U(n)$ är sann för alla heltal $n \geq 1$.

3. Antalet små skivor som Sinus åt vecka nummer n ges av $a_n = a_1 + (n-1)d$, där $d = 2$ och där vi inte känner till a_1 ännu. Eftersom det är en aritmetisk talföljd kan vi skriva upp ett uttryck för summan av de tio första talen, och sätta detta lika med 140:

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \cdot \frac{2a_1 + (10-1) \cdot 2}{2} = 10(a_1 + 9) = 140 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 5.$$

Vi kan nu beräkna $a_3 = 5 + (3-1) \cdot 2 = 9$.

Svar: Sinus åt nio små skivor Parmigiano-Reggiano den tredje veckan.

4. (a) Ekvationen är separabel, och vi kan skriva om den som

$$e^y y' = x^3,$$

eftersom det inte är farligt att dela med $e^{-y} > 0$. Genom att integrera båda sidor med avseende på x får vi

$$\int e^y y' \, dx = \int x^3 \, dx,$$

där (vi sparar konstanten till höger sida)

$$\int e^y y' \, dx = \big[dy = y'(x) \, dx\big] = \int e^y \, dy = e^y$$

och

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

för någon konstant C. Det gäller alltså att

$$e^y = \frac{x^4}{4} + C \Leftrightarrow y = \ln\big(x^4/4 + C\big).$$

Svar: Funktionen ges av $y(x) = \ln\big(x^4/4 + C\big)$, där C är en konstant.

(b) Ekvationen är lineär och av första ordningen, och vi löser den därför med metoden som bygger på *integrerande faktorn*.

Integrerande faktorn blir I.F $= e^{\ln x} = x$ (eftersom $x > 0$), och denna skall multipliceras in på båda sidor. Detta leder till

$$\underbrace{xy' + y}_{\text{produktderivata}} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(xy) = x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$xy = \int x^2 \, dx \quad \Leftrightarrow \quad xy = \frac{x^3}{3} + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x},$$

där C är en konstant.

Svar: Funktionen ges av $y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C}{x}$, där C är en konstant.

(c) Här har vi en inhomogen lineär ekvation av ordning två med konstanta koefficienter. Alla lösningar kommer att vara på formen $y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$, där $y_{\mathrm{h}}(x)$ är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_{\mathrm{p}}(x)$ är någon partikulärlösning.

För att hitta $y_{\mathrm{h}}(x)$ löser vi *karakteristiska ekvationen*:

$$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i.$$

Eftersom rötterna inte är reella skriver vi lösningen på formen

$$y_{\mathrm{h}}(x) = e^{0x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

En partikulärlösning $y_{\mathrm{p}}(x)$ kan vi få genom en lämplig ansats. Eftersom högerledet är ett andragradspolynom ansätter vi ett andragradspolynom som partikulärlösning:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = Cx^2 + Ex + F \quad \Rightarrow \quad y'_{\mathrm{p}}(x) = 2Cx + E \quad \Rightarrow \quad y''_{\mathrm{p}}(x) = 2C.$$

Insättning i ekvationen ger

$$2C + 4(Cx^2 + Ex + F) = 2 + 8x - 4x^2.$$

Genom att identifiera koefficienter får vi

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ \text{konstant}: \end{array} \quad \begin{cases} 4C = -4 \\ 4E = 8 \\ 2C + 4F = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ E = 2 \\ F = 1. \end{cases}$$

En partikulärlösning är alltså $y_{\mathrm{p}}(x) = 1 + 2x - x^2$.

Alla lösningar till differentialekvationen fås som

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + 1 + 2x - x^2,$$

där A och B är konstanter.

Svar: Lösningarna ges av $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + 1 + 2x - x^2$, där A och B är konstanter.

5. Differentialekvationen är separabel, och vi kan skriva om ekvationen enligt

$$y' = ky\Big(1 - \frac{y}{L}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad Ly' = ky(L-y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ly'}{y(L-y)} = k,$$

eftersom $y \neq 0$ och $y \neq L$.

Vi integrerar nu båda sidor med avseende på t, där högerledet blir $kt + C$, och där vänsterledet

$$\int \frac{Ly'}{y(L-y)}\,dt = \int \frac{L}{y(L-y)}\,dy$$

behöver övervinnas genom partialbråksuppdelning. Lämplig ansats för detta är

$$\frac{L}{y(L-y)} = \frac{A}{L-y} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + B(L-y)}{y(L-y)},$$

där identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{r} y: \\ \text{konstant}: \end{array} \quad \begin{cases} A - B = 0 \\ BL = L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1. \end{cases}$$

Vi får nu (konstanten har vi redan i högerledet)

$$\begin{aligned}\int \frac{Ly'}{y(L-y)}\,dt = \int \frac{L}{y(L-y)}\,dy = \int \Big(\frac{1}{L-y} + \frac{1}{y}\Big)\,dy = \\ = -\ln|L-y| + \ln|y| = \big[\text{eftersom } 0 < y(t) < L\big] = \\ = \ln y - \ln(L-y) = \ln\Big(\frac{y}{L-y}\Big).\end{aligned}$$

Det återstår bara att lösa ut $y(t)$:

$$\ln\Big(\frac{y}{L-y}\Big) = kt + C \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y}{L-y} = e^{kt+C} \quad\Leftrightarrow\quad y = e^{kt+C}(L-y) \quad\Leftrightarrow$$
$$y = \underbrace{e^C}_{=M} e^{kt}(L-y) \quad\Leftrightarrow\quad \big(1 + Me^{kt}\big)y = LMe^{kt} \quad\Leftrightarrow\quad y(t) = \frac{LMe^{kt}}{1+Me^{kt}}.$$

Svar: Funktionen som anger bakteriepopulationens storlek är $y(t) = \dfrac{LMe^{kt}}{1+Me^{kt}}$, där M är en positiv konstant (och k och L förklaras i problembeskrivningen).

6. Vi börjar med att bestämma kurvornas skärningspunkter:

$$\begin{aligned}x\sqrt{4-x^2} = x^2 - 2x \quad&\Rightarrow\quad x^2(4-x^2) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad\Leftrightarrow\\ 2x^4 - 4x^3 = 0 \quad&\Leftrightarrow\quad x^3(x-2) = 0,\end{aligned}$$

så kurvorna skär varandra i $x = 0$ och i $x = 2$. En enkel kontroll (sätt exempelvis in $x = 1$) visar att $x\sqrt{4-x^2} \geq x^2 - 2x$ på intervallet $[0, 2]$, så den sökta arean är

$$\begin{aligned}A &= \int_0^2 \big(x\sqrt{4-x^2} - (x^2-2x)\big)\,dx = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2 (x^2-2x)\,dx = \\ &= \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx - \Big[\frac{x^3}{3} - x^2\Big]_0^2 = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx - \Big(\frac{8}{3} - 4\Big) = \\ &= \begin{bmatrix} u = 4 - x^2 \\ du = -2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\Big[\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big]_4^0 = \frac{4}{3} - \Big[\frac{u^{3/2}}{3}\Big]_4^0 = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4^{3/2}}{3} = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4.\end{aligned}$$

Svar: Arean är $A = 4$.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 4.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 1.