Tentamen i MVE425 Matematik, del D 2018-05-31 kl. 14:00–18:00

Examinator: Mårten Wadenbäck
Telefonvakt: Mårten Wadenbäck, telefon: x3584
Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre kvävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 32 poäng, och för betyget fem krävs minst 42 poäng. Lösningar publiceras på kurshemsidan efter skrivningen. Resultatet meddelas i LADOK, och bör synas senast 2018-06-05. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra). Motivera dina svar väl—det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

---

1. Beräkna följande integraler (förenkla så långt det går):

(a) $\displaystyle\int e^{-\sqrt{x}}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx,$ (c) $\displaystyle\int \frac{7x+4}{x^3+x^2}\,dx.$ (9p)

2. Visa med induktion att $D^n\big[2xe^{2x}\big] = 2^n(2x+n)e^{2x}$ för alla heltal $n \geq 1$. (Här betecknar D^n som vanligt n:e derivatan med avseende på x.) (6p)

3. Katten Sinus är förtjust i osten Parmigiano-Reggiano (”parmesan”), och köpte därför hem en stor bit för cirka tre månader sedan. Varje vecka har hon ätit två små skivor mer än föregående vecka, och på de tio första veckorna åt hon sammanlagt 140 små skivor. Hur många små skivor åt Sinus den tredje veckan? (5p)

4. Bestäm alla funktioner $y(x)$ som uppfyller:

(a) $y' = x^3e^{-y}$, (b) $y' + \dfrac{1}{x}y = x$ (för $x > 0$), (c) $y'' + 4y = 2 + 8x - 4x^2$. (12p)

5. I en reningsverksdamm tillsätts en bakteriepopulation för att förbättra reningsprocessen. Bakteriepopulationens storlek, $y(t)$, uppfyller den *logistiska ekvationen* $y' = ky(1 - \frac{y}{L})$, där $k > 0$ är en konstant som har med bakteriernas förökning och livslängd att göra och L är den maximala bakteriepopulationen som reningsverksdammen kan innehålla (därefter räcker inte födoämnena). Bestäm funktionen $y(t)$ under förutsättning att $y(t) < L$. (6p)

6. Bestäm arean av det begränsade område som stängs in mellan kurvorna $y = x\sqrt{4-x^2}$ och $y = x^2 - 2x$. (4p)

7. Bevisa att om F och G är två primitiva funktioner till f, så är $G(x) = F(x) + C$ för någon konstant C. (4p)

8. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)

Lycka till!