1. (a) Vi har att göra med en rationell funktion, och täljarpolynomets grad är lägre än nämnarpolynomets (vi slipper polynomdivision). Faktorisering av nämnaren i reella faktorer ger $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. En lämplig ansats för partialbråk är

$$\frac{2x^2+2x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{E}{x-1} = \frac{A(x^2-x)+B(x-1)+Ex^2}{x^2(x-1)},$$

där identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ \text{konstant}: \end{array} \quad \begin{cases} A+E = 2 \\ -A+B = 2 \\ -B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ E = 3. \end{cases}$$

Integralen ges då av

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x-1}\right)dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + C.$$

Svar: Integralen blir $-\ln|x| - \dfrac{1}{x} + 3\ln|x-1| + C$.

(b) Ett variabelbyte ger

$$\int (2+\sin x)^3 \cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2+\sin x \\ du = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \int u^3\,du = \\ = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(2+\sin x)^4}{4} + C.$$

Svar: Integralen blir $\dfrac{(2+\sin x)^4}{4} + C$.

(c) En partialintegration ger

$$\int x^4 \ln x\,dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^4}{5}\,dx = \\ = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + C.$$

Svar: Integralen blir $\dfrac{x^5}{5}\ln x - \dfrac{x^5}{25} + C$.

2. Vi betecknar

$$VL(n) = \sum_{k=1}^{n} 3k(k-1) \qquad \text{och} \qquad HL(n) = (n-1)n(n+1),$$

och låter $U(n)$ vara utsagan (påståendet) att $VL(n) = HL(n)$.

Eftersom

$$VL(1) = \sum_{k=1}^{1} 3k(k-1) = 3\cdot 1\cdot(1-1) = 0 = (1-1)\cdot 1\cdot(1+1) = HL(1)$$

är $U(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall.*

Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $U(p) \Rightarrow U(p+1)$. Antag därför att $U(p)$ är sann för något visst p, dvs att $VL(p) = HL(p)$. Det gäller nu att

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} 3k(k-1) = 3(p+1)(p+1-1) + \sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) \\ &= 3(p+1)p + VL(p) = 3p(p+1) + HL(p) \\ &= 3p(p+1) + (p-1)p(p+1) = p(p+1)(3+p-1) \\ &= p(p+1)(p+2) = (p+1-1)(p+1)(p+1+1) = HL(p+1), \end{aligned}$$

där de coelinblå uttrycken ovan är lika enligt antagandet att $U(p)$ är sann. Vi har nu funnit att $U(p+1)$ är sann så fort $U(p)$ är sann, dvs induktionssteget $U(p) \Rightarrow U(p+1)$ gäller.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $U(n)$ är sann för alla heltal $n \geq 1$.

3. Vi avläser första termen $a_1 = 6x^2$ och får seriens kvot till $q = \frac{12x^4}{6x^2} = 2x^2$, så att $a_n = a_1 q^{n-1} = 6x^2(2x^2)^{n-1}$. Serien kan nu skrivas

$$6x^2 + 12x^4 + 24x^6 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 6x^2(2x^2)^{k-1},$$

och satsen om geometriska serien säger att om $-1 < 2x^2 < 1$ så är serien konvergent och har summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} 6x^2(2x^2)^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{6x^2}{1-2x^2}.$$

Om detta skall vara lika med 3 måste

$$\frac{6x^2}{1-2x^2} = 3 \Leftrightarrow 6x^2 = 3 - 6x^2 \Leftrightarrow 12x^2 = 3 \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2},$$

och lyckligtvis är $-1 < \pm\frac{1}{2} < 1$.

Svar: Serien skrivs $\sum_{k=1}^{\infty} 6x^2(2x^2)^{k-1}$ och har summan 3 då $x = \pm\frac{1}{2}$.

4. (a) Ekvationen är separabel, och vi kan skriva om den som

$$e^y y' = 6e^{2x},$$

eftersom det inte är farligt att dela med $e^{-y} > 0$. Genom att integrera båda sidor med avseende på x får vi

$$\int e^y y'\,dx = \int 6e^{2x}\,dx,$$

där (vi sparar konstanten till höger sida)

$$\int e^y y'\,dx = \big[dy = y'(x)\,dx\big] = \int e^y\,dy = e^y$$

och

$$\int 6e^{2x}\,dx = 3e^{2x} + C$$

för någon konstant C. Det gäller alltså att

$$e^y = 3e^{2x} + C \Leftrightarrow y = \ln\big(3e^{2x} + C\big).$$

Svar: Funktionen ges av $y(x) = \ln\big(3e^{2x} + C\big)$, där C är en konstant.

(b) Ekvationen är lineär och av första ordningen, och vi löser den därför med metoden som bygger på *integrerande faktorn*.

Integrerande faktorn blir I.F $= e^{x^2}$, och denna skall multipliceras in på båda sidor. Detta leder till

$$\underbrace{e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y}_{\text{produktderivata}} = 6xe^{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dx}\big(e^{x^2}y\big) = 6xe^{x^2} \quad\Leftrightarrow$$

$$e^{x^2}y = \int 6xe^{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int 3e^u\,du = 3e^{x^2} + C \quad\Leftrightarrow$$

$$y(x) = 3 + Ce^{-x^2},$$

där C är en konstant.

Svar: Funktionen ges av $y(x) = 3 + Ce^{-x^2}$, där C är en konstant.

(c) Här har vi en inhomogen lineär ekvation av ordning två med konstanta koefficienter. Alla lösningar kommer att vara på formen $y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$, där $y_{\mathrm{h}}(x)$ är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_{\mathrm{p}}(x)$ är någon partikulärlösning.

För att hitta $y_{\mathrm{h}}(x)$ löser vi *karakteristiska ekvationen*:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2.$$

Eftersom karakteristiska ekvationen har en dubbelrot blir homogena lösningen

$$y_{\mathrm{h}}(x) = (Ax + B)e^{2x}.$$

En partikulärlösning $y_{\mathrm{p}}(x)$ kan vi få genom en lämplig ansats. Eftersom högerledet är ett förstagradspolynom ansätter vi ett förstagradspolynom som partikulärlösning:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = Cx + E \quad\Rightarrow\quad y'_{\mathrm{p}}(x) = C \quad\Rightarrow\quad y''_{\mathrm{p}}(x) = 0.$$

Insättning i ekvationen ger

$$0 - 4C + 4(Cx + E) = 8x.$$

Genom att identifiera koefficienter får vi

$$\begin{array}{r} x: \\ \text{konstant}: \end{array} \quad \begin{cases} 4C = 8 \\ 4E - 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ E = 2. \end{cases}$$

En partikulärlösning är alltså $y_{\mathrm{p}}(x) = 2x + 2$.

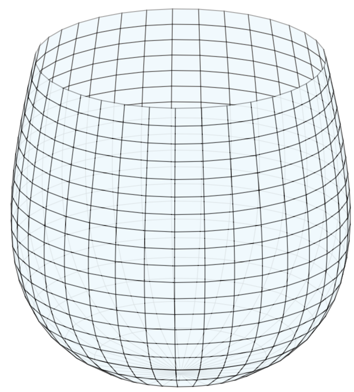
Alla lösningar till differentialekvationen fås som

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = (Ax + B)e^{2x} + 2x + 2,$$

där A och B är konstanter.

Svar: Lösningarna ges av $y(x) = (Ax + B)e^{2x} + 2x + 2$, där A och B är konstanter.

5. Vi använder formeln för rotationsvolym,



$$V = \pi \int_a^b y(x)^2\, dx,$$

där i vårt fall $a = 0$, $b = 3$, och $y(x) = \frac{5}{3}\sqrt{3x}e^{-x/6}$.

Detta ger

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 \left(\frac{5}{3}\sqrt{3x}e^{-x/6}\right)^2 dx \\
&= \frac{25\pi}{3}\int_0^3 xe^{-x/3}\, dx = [\text{partialintegration}] \\
&= \frac{25\pi}{3}\left(\Big[-3xe^{-x/3}\Big]_0^3 + \int_0^3 3e^{-x/3}\, dx\right) \\
&= \frac{25\pi}{3}\left(-9e^{-1} + 0 + \Big[-9e^{-x/3}\Big]_0^3\right) \\
&= \frac{25\pi}{3}(-9e^{-1} - 9e^{-1} + 9) = 25\pi(3 - 6e^{-1}) = 75\pi(1 - 2e^{-1}).
\end{aligned}$$

Svar: Om glaset är fyllt till halva höjden innehåller det $75\pi(1-2e^{-1})$ volymenheter ($\approx$0.62 dl om längdenheten är centimeter, dvs väldigt litet vinglas).

6. Vi börjar med att bestämma var kurvan skär x-axeln:

$$x^2\sqrt{2-2x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 0 & \text{eller} \\ \sqrt{2-2x^3} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 & \text{eller} \\ x = 1. \end{cases}$$

Den sökta arean är alltså

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 x^2\sqrt{2-2x^3}\, dx = \begin{bmatrix} u = 2 - 2x^3 \\ du = -6x^2\, dx \end{bmatrix} = \int_2^0 -\frac{\sqrt{u}}{6}\, du \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 u^{1/2}\, du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \frac{1}{9}\left[u^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

Svar: Arean är $A = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

7. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 4.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 13.