Mårten Wadenbäck

Talföljder och summor

En oändlig följd av tal hallas för en <u>talföljd</u>, och skrivs ofta $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eller $(a_n)_1^{\infty}$.

Exempel: Talföljden $(n \cdot 2^n)_{n=1}^{\infty}$ innehåller talen

$$2, 8, 24, 64, 160, \ldots$$

Det går naturligtvis bra att använda vilken bokstav som helst istället för n, och det går bra att börja på ett annat heltal än 1 om man vill.

Exempel: Talföljden $(2b^2+b)_{b=-5}^{\infty}$ innehåller talen

$$45, 28, 15, 6, 1, 0, 3, 10, \ldots$$

Definition: Två talföljder är <u>lika</u> om de innehåller precis samma tal på precis samma plats.

Exempel: Talföljderna $(3x-2)_{x=1}^{\infty}$ och $(3t+7)_{t=-2}^{\infty}$ är lika:

$(3x-2)_{x=1}^{\infty}$: $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$

$(3t+7)_{t=-2}^{\infty}$: $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$

Varje talföljd kan ses som en funktion från de naturliga talen till de reella (eller komplexa) talen, och vi skriver ibland $a_n = f(n)$ för att definiera en talföljd.

Definition: En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs vara <u>konvergent</u> om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar (ändligt), och kallas <u>divergent</u> i annat fall.

Exempel: Talföljden $a_n = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ är konvergent och talföljden $b_n = 2^n$, $n=1,2,\ldots$ är divergent.

Definition: Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Talföljden är

- en <u>aritmetisk talföljd</u> om $a_{k+1} - a_k$ är konstant för alla k.
- en <u>geometrisk talföljd</u> om $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ är konstant för alla k.

Exempel: De udda positiva talen utgör en aritmetisk talföljd. Detta ser vi genom att skriva följden som $u_n = 2n-1$ och beräkna

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)-1 - (2n-1) = 2 = \text{konstant.}$$

Exempel: Följden $a_n = 2^{-n}$ uppfyller $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{-k-1}}{2^{-k}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(konstant) för alla k, så den är en geometrisk talföljd.

Om $(a_n)_1^\infty$ är en aritmetisk talföljd med differensen d är $a_2 - a_1 = d \Leftrightarrow a_2 = a_1 + d$, $a_3 - a_2 = d \Leftrightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, och vi får allmänt att $\underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

Om $(a_n)_1^\infty$ är en geometrisk talföljd med kvoten q är $\frac{a_2}{a_1} = q \Leftrightarrow a_2 = a_1 q$, $\frac{a_3}{a_2} = q \Leftrightarrow a_3 = a_2 q = a_1 q^2$, och vidare blir

$\underline{a_n = a_1 q^{n-1}}$.

Exempel: I en aritmetisk talföljd är tredje talet 22 och sjätte talet 37. Bestäm talföljden.

Lösning: Eftersom det är en aritmetisk talföljd är den på formen $a_n = a_1 + (n-1)d$, och vi vet att $22 = a_3 = a_1 + (3-1)d = a_1 + 2d$

samt $37 = a_6 = a_1 + (6-1)d = a_1 + 5d$. Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 22 \\ a_1 + 5d = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 22 \\ 3d = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 12 \\ d = 5. \end{cases}$$

Talföljden är alltså $a_n = 12 + (n-1)\cdot 5 = 5n + 7$.

Exempel: En geometrisk talföljd börjar $\frac{9}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{20}, \ldots$

Bestäm tionde talet i följden.

Lösning: Första talet är $\frac{9}{5}$, men vi behöver även kvoten. Den får vi till $q = \frac{-\frac{3}{10}}{\frac{9}{5}} = -\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9} = -\frac{1}{6}$

(eller $q = \frac{\frac{1}{20}}{-\frac{3}{10}} = -\frac{1}{20}\cdot\frac{10}{3} = -\frac{1}{6}$), så $a_n = \frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

Det tionde talet blir $a_{10} = \frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^9 = \ldots = -\frac{1}{5598720}$.

Vi inför nu <u>summasymboken</u> Σ. Om $m \le n$ använder vi beteckningen $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$

(och om $m > n$ brukar man låta $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$).

Bokstaven k är <u>summationsindex</u>, och han bytas ut mot vilken annan bokstav som helst (som inte redan används, m eller n är inte bra val).

Exempel: Skriv följande summor utan summa-symbolen:

a) $\underbrace{\sum_{k=2}^{5} k^2}_{=2^2+3^2+4^2+5^2=54}$

b) $\underbrace{\sum_{j=2}^{5} k^2}_{=k^2+k^2+k^2+k^2=4k^2}$

c) $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}$

Termerna beror inte på summationsindex!

Exempel: Skriv följande summor med summasymbolen:

a) $\underbrace{1+4+9+\dots+81+100}_{=\sum_{k=1}^{10} k^2}$

b) $\underbrace{-3+9-27+\dots+(-3)^{12}}_{=\sum_{k=1}^{12} (-3)^k}$

För summor har vi följande räkneregler (linearitet):

(i) $\sum_{k=m}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

(ii) $\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$ för varje konstant c.

Anmärkning: Linearitet dyker upp i många fler sammanhang och är en väldigt viktig och användbar egenskap!

Sats (Aritmetisk summa): Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en aritmetisk talföljd och s_n är summan av de första n talen i följden så är

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.$$

Bevis: Skriv summan en gång framlänges och en gång baklänges, och addera:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_1 + (n-1)d \\ S_n &= a_n + a_n - d + a_n - 2d + \dots + a_n - (n-1)d \\ \hline 2S_n &= \underbrace{a_1 + a_n}_{} + \underbrace{a_1 + a_n}_{} + \underbrace{a_1 + a_n}_{} + \dots + \underbrace{a_1 + a_n}_{} \end{aligned}$$

n st

Vi får $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}$.

Exempel: Summera de första hundra talen i den aritmetiska talföljden som börjar 1, 3, 5, ...

Lösning: Vi utläser differensen $d = 2$, så tal n i följden är $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$. Formeln för aritmetisk summa ger nu

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 100 \cdot \frac{a_1 + a_{100}}{2} = 100 \cdot \frac{1 + 1 + (100-1) \cdot 2}{2} = 100 \cdot 100 = 10000.$$

Sats (Geometrisk summa): Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en geometrisk talföljd med kvoten q och s_n är summan av de första n talen i följden så är

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n \cdot a_1 & \text{om } q=1 \\ a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{om } q \neq 1. \end{cases}$$

Bevis: Om $q=1$ så är $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, så $s_n = na_1$.

Om $q \neq 1$ så är

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} =$$

$$= a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \cdot \frac{1-q}{1-q} =$$

$$= a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} - q - q^2 - q^3 - \ldots - q^n) \cdot \frac{1}{1-q} =$$

$$= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Exempel: En geometrisk talföljd ges av $a_n = \frac{9}{5} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

Bestäm summan $\sum_{k=10}^{15} a_k$.

Lösning: Vi utnyttjar att $\sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{9} a_k + \sum_{k=10}^{15} a_k$

och får

$$\sum_{k=10}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{9} a_k = \frac{9}{5} \cdot \frac{1-\left(-\frac{5}{6}\right)^{15}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)} - \frac{9}{5} \cdot \frac{1-\left(-\frac{5}{6}\right)^{9}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)} =$$

$$= \frac{9}{5} \cdot \frac{1-\left(-\frac{5}{6}\right)^{15} - 1 + \left(-\frac{5}{6}\right)^{9}}{1+\frac{5}{6}} = \frac{9}{5} \cdot \frac{\left(-\frac{5}{6}\right)^{9} - \left(\frac{5}{6}\right)^{15}}{1+\frac{5}{6}} =$$

$$= \frac{54}{55}\left(\left(-\frac{5}{6}\right)^{9} - \left(-\frac{5}{6}\right)^{15}\right).$$