Mårten Wadenbäck

Matematisk induktion

En utsaga är ett påstående som har ett väldefinierat sanningsvärde (sant/falskt).

Exempel på utsagor:

A: Slaget vid Crécy utkämpades den 26 augusti 1346.

B: Ljusets fart i vakuum är 12 km/h.

Däremot inte:

C: Choklad är gott.

D: Vem vill bli miljonär?

E: Detta påstående är falskt.

G: Skynda dig!

För utsagor som beror på ett naturligt tal n (sådana utsagor kallas predikat) gäller induktionsprincipen:

Om (i) $U(1)$ är sann (basfallet), och

(ii) $U(k) \Rightarrow U(k+1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$ (induktionssteget).

Så är $U(n)$ sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel: Låt $U(n)$: $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$. Vi kontrollerar

basfallet, $U(1)$: $\sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 2-1=1$ (stämmer).

För att visa induktionssteget antar vi att $U(k)$ är sann för något k, och visar att detta medför att även $U(k+1)$ är sann.

Antag därför att $\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = k^2$ för något k.

Då är $HL(k+1) = (k+1)^2$ och

$$VL(k+1) = \sum_{j=1}^{k+1}(2j-1) = \sum_{j=1}^{k}(2j-1) + 2(k+1)-1 =$$

$$= [\text{använd antagandet}] = k^2 + 2k+2-1 = k^2+2k+1,$$

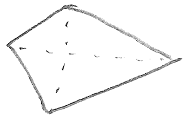
så $HL(k+1) = VL(k+1)$ och alltså $U(k) \Rightarrow U(k+1)$.

Enligt induktionsprincipen måste $U(n)$ vara sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

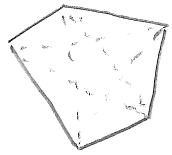
Anmärkning: Det går att börja på ett annat tal än $n=1$ om man vill, det kan finnas fler än ett basfall, och ibland är det nödvändigt att antaga mer i induktionssteget.

Exempel: Hur många diagonaler finns det i en konvex n-hörning? Här är det meningslöst att tala om $n<3$. Vi testar några små värden på n:

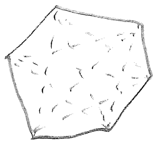
$n=3$
0 diagonaler



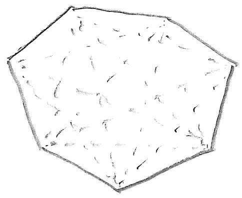
$n=4$
2 diagonaler



$n=5$
5 diagonaler



$n=6$
9 diagonaler



$n=7$
14 diagonaler

Vi gissar att antalet diagonaler ökar med två, sedan tre, sedan fyra, osv. Om detta stämmer är antalet diagonaler

$$D(n) = \sum_{j=2}^{n-2} j = \sum_{j=1}^{n} j - 1 - (n-1) - n =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n^2+n-4n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Detta är än så länge endast en gissning!

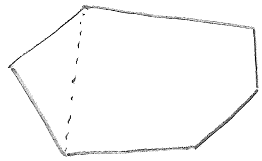
Vi försöker bevisa att det är sant med hjälp av induktion.

Vi kontrollerar basfallet $n=3$: $\frac{n(n-3)}{2}$ (stämmer).

För induktionssteget antar vi att $D(k)=\frac{k(k-3)}{2}$

för något $k\geq 3$ och betraktar en konvex

$(k+1)$-hörning:



I denna kan vi dra en diagonal som ger oss en k-hörning och en triangel.

I triangeln finns inga diagonaler, och i k-hörningen finns enligt antagandet $D(k)=\frac{k(k-3)}{2}$ diagonaler.

Från det "bortklippta" hörnet kan vi dra $k-2$ diagonaler till de andra hörnen. Totalt får vi

$$D(k+1) = 1 + 0 + \frac{k(k-3)}{2} + k-2 = \frac{2+k^2-3k+2k-4}{2} =$$

$$= \frac{k^2-k-2}{2}.$$

Stämmer detta med vår gissade formel? Vi sätter in $n=k+1$ och får $D(k+1)=\frac{(k+1)(k+1-3)}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}$.

Enligt induktionsprincipen gäller $D(n)=\frac{n(n-3)}{2}$

för alla $n\geq 3$.

Exempel: Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Utsagan är $U(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, och vi

ser lätt att basfallet är sant eftersom

$$U(1): \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} \quad \text{stämmer.}$$

Antag att $U(n)$ är sann för $n = p$, och

beräkna $\quad VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

$$= [\text{använd antagandet}] =$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

och $\quad HL(p+1) = \frac{p+1}{p+1+1} = \frac{p+1}{p+2}$.

Eftersom $VL(p+1) = HL(p+1)$ har vi visat att

$U(p) \Rightarrow U(p+1)$, och induktionsprincipen

säger då att $U(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

Varning: Det finns stor risk att bli lurad av ett felaktigt induktionsbevis!

Exempel (fel): Vi visar att $3^{n-1}=1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Basfallet $U(1)$: $3^{1-1}=1$ är sant. Antag att $U(n)$ är sann för $n=1,2,\ldots,p$, dvs $3^{1-1}=1$, $3^{2-1}=1$, ..., $3^{p-1}=1$. Då måste

$$U(p+1): \quad 3^{p+1-1} = 3^{2p-2-(p-3)} =$$

$$= \frac{(3^{p-1})^2}{3^{p-3}} = [\text{använd antagandet}] =$$

$$= \frac{1^2}{1} = 1$$

vara sant, och induktionsprincipen ger (verkligen inte!) att $3^{n-1}=1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.