Mårten Wadenbäck

Serier

En *serie* är en "summa som består av oändligt många termer", dvs ett uttryck på formen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$. Summan $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ kallas för *seriens n:e delsumma*.

Definition: En serie sägs vara *konvergent* med *summan* s om

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s,$$

och i annat fall är serien *divergent* (och saknar summa).

Exempel: Förra föreläsningen bevisade vi med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi kan se detta som den n:e delsumman till serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Eftersom $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ är

serien konvergent och har summan 1,

dvs $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Följande egenskap brukar tas som axiom:

En växande och uppåt begränsad talföljd

är alltid konvergent.

Exempel: Betrakta följden av delsummor till

serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ dvs $s_1 = \frac{1}{4}$, $s_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$, osv.

Eftersom termerna är positiva är följden

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ en växande följd. Vi ser även att

$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$, så för varje n gäller

att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, och

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad.

Alltså är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergent.

Sats: Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{är konvergent så är} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bevis: Låt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Eftersom serien är konvergent existerar $\lim_{n\to\infty} s_n$ och är lika med något tal s. Notera att

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n,$$

så $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0.$

Följdsats: Om $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Exempel: Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5-3k-2^k}{2^k+k^2+1}$ är divergent

eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{5-3n-2^n}{2^n+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(\frac{5}{2^n} - \frac{3n}{2^n} - 1\right)}{2^n\left(1+\frac{n^2}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)}$

$$= \frac{0-0-1}{1+0+0} = -1 \neq 0.$$

Varning: En serie kan vara divergent även om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exempel: Den så kallade harmoniska serien

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent trots att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Detta kan vi visa på följande sätt.

Antag motsatsen, dvs att serien är konvergent och har summan $H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Då är

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + H,$$

vilket är en motsägelse. Serien kan alltså inte vara konvergent.

Exempel: Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en aritmetisk talföljd och att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

Då gäller $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_1 + (n-1)d = 0 \Leftrightarrow$ $a_1 = d = 0$. Enda konvergenta aritmetiska serien är $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$.

För <u>geometriska serier</u>, dvs $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ där $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en geometrisk talföljd, är situationen inte lika krånglig. Vi har nämligen följande

Sats: Den geometriska serien $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots$ (där $a_1 \neq 0$) är konvergent om och endast om $-1 < q < 1$ (dvs $|q| < 1$), och dess summa är då

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Bevis: Om $|q| \geq 1$ så är $q = \pm r$ för något $r \geq 1$, och eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_1 (\pm r)^{n-1} =$

$= \lim_{n\to\infty} a_1 (\pm 1)^{n-1} r^{n-1} \neq 0$ är serien divergent då $|q| \geq 1$.

Om $|q| < 1$ så är $q = \pm \frac{1}{r}$ för något $r > 1$, och med hjälp av formeln för geometrisk summa får vi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} =$

$$= \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(\pm 1)^n r^n}}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exempel: Den geometriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{k-1}$ är konvergent eftersom $-1 < \frac{5}{8} < 1$, och seriens summa är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{k-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{8-5} = \frac{4}{3}$.

Exempel: Konvergerar serien $\sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k}(1-2^{-k})$?

Vad blir i så fall dess summa?

Vi skriver om serien som

$$\sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k}(1-2^{-k}) = \sum_{k=3}^{\infty} (2^{-k} - 2^{-2k}) =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} - \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

Bortsett från att det saknas några termer i början ser detta ut att vara två konvergenta geometriska serier ($-1 < \frac{1}{2} < 1$ och $-1 < \frac{1}{4} < 1$).

Vi beräknar $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{0} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) =$$

$$= \frac{2}{2-1} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4-1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} =$$

$$= 2 - \frac{2}{4} - \frac{4}{3} + \frac{1}{16} = \frac{96 - 24 - 64 + 3}{48} = \frac{11}{48}.$$

Exempel: Vilket rationellt tal har decimalutvecklingen

0.123123123123... ? Vi kan skriva detta

som en geometrisk serie, och på så sätt

beräkna dess värde. Vi får

$$0.123123123123\ldots = 123 \cdot 10^{-3} + 123 \cdot 10^{-6} + 123 \cdot 10^{-9} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 123 \cdot (10^{-3})^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{123}{1000} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{\frac{123}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{123}{1000-1} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333},$$

eftersom $-1 < \frac{1}{1000} < 1$.