Mårten Wadenbäck

Primitiva funktioner

Definition: Antag att funktionen f är definierad på ett intervall I. Funktionen F sägs då vara en primitiv funktion (eller antiderivata) till f på I om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Exempel: Både $\ln x$ och $\ln(3x)$ är primitiva funktioner till $\frac{1}{x}$, eftersom

$$D[\ln x] = \frac{1}{x} \quad \text{och} \quad D[\ln(3x)] = D[\ln 3 + \ln x] = \frac{1}{x}.$$

En funktion f kan alltså ha flera primitiva funktioner!

Vi erinrar oss från förra kursen följdsatsen till medelvärdessatsen:

Sats: Antag att en funktion F är deriverbar på ett intervall I. Då gäller att:

(i) $F'(x) > 0$ på I $\Rightarrow$ F strängt växande på I

(ii) $F'(x) \geq 0$ på I $\Rightarrow$ F växande på I

(iii) $F'(x) < 0$ på I $\Rightarrow$ F strängt avtagande på I

(iv) $F'(x) \leq 0$ på I $\Rightarrow$ F avtagande på I

(v) $F'(x) = 0$ på I $\Rightarrow$ F konstant på I.

Den sista regeln kommer vi att ha nytta av för att bevisa följande:

Sats: Antag att både F och G är primitiva funktioner till f på intervallet I. Då är $G(x) = F(x) + C$, där C är en konstant, för alla $x \in I$.

Bevis: Sätt $H(x) = G(x) - F(x)$. Eftersom både F och G är primitiva funktioner till f så är

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

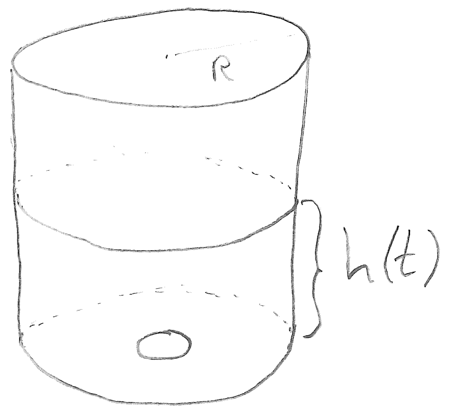
Följdsatsen till medelvärdessatsen insisterar nu på att $H(x) = C$ för någon konstant C, dvs att $G(x) - F(x) = C \Leftrightarrow G(x) = F(x) + C$.

Primitiva funktioner dyker upp i flera olika sammanhang, men framförallt är de viktiga för sin koppling till bestämda integraler (som vi skall se senare i kapitel 10).

Exempel: Antag att ett tåg färdas längs x-axeln. Låt $x(t)$ vara tågets position vid tiden t, och låt $s(t)$ vara sträckan (med tecken) som tåget kört från startpunkten vid tiden t. Om tåget startade i $x(0) = x_0$ så är $x(t) = x_0 + s(t)$. Tågets hastighet vid tiden t är $v(t) = x'(t) = s'(t)$, så både $s(t)$ och $x(t)$ är primitiva funktioner till $v(t)$. Accelerationen ges av $a(t) = v'(t)$, så $v(t)$ är en primitiv funktion till $a(t)$.

Exempel: I en hög cylindrisk vattencistern med radien R finns en cirkulär öppning med radien r i botten på cisternen.

Vid tiden t står vattnet till höjden $h(t)$ i cisternen.



Enligt Torricellis lag kommer hastigheten på vattnet ut genom hålet att vara $\sqrt{gh(t)}$ där g är tyngdaccelerationen.

Utflödet genom hålet vid tiden t blir $f(t) = r^2\pi\sqrt{gh(t)}$. Om volymen vid tiden t är $V(t) = R^2\pi h(t)$ är volymförändringshastigheten $V'(t) = -f(t) = -r^2\pi\sqrt{gh(t)}$. Med andra ord är $V(t)$ en primitiv funktion till $-f(t)$ och $R^2\pi h(t)$ är en primitiv funktion till $-r^2\pi\sqrt{gh(t)}$. Eftersom

$$V'(t) = R^2\pi h'(t) = -r^2\pi\sqrt{gh(t)}$$

är

$$h'(t) = -\left(\frac{r}{R}\right)^2\sqrt{gh(t)}.$$

Detta är en <u>differentialekvation</u> som beskriver höjden (mer om dessa i kapitel 11).

Antag att $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på intervallet I, dvs att $F'(x) = f(x)$ på I.

Vi inför nu skrivsättet $\int f(x)\,dx$, som kallas den <u>obestämda integralen</u> av f, och som betecknar alla primitiva funktioner till f på I. Sedan tidigare vet vi då att alla primitiva funktioner till f som mest skiljer på en konstant, så vi får

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

för någon konstant C (som kallas <u>integrationskonstant</u>).

Exempel: Låt $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{om } x \geq 0 \\ \ln(-x) & \text{om } x < 0. \end{cases}$

Då är $f'(x) = \begin{cases} D[\ln x] & \text{om } x > 0 \\ D[\ln(-x)] & \text{om } x < 0 \end{cases} \iff$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{om} \quad x>0\\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) & \text{om} \quad x<0\end{cases} \iff f'(x)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

På varje intervall som inte innehåller $x=0$ är alltså $f(x)=\ln|x|$ en primitiv funktion till $\frac{1}{x}$, och alltså blir den obestämda integralen $\int \frac{1}{x}\,dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ för någon konstant C.

Exempel: Antag att en elektrisk laddning q är belägen i $x=a$. Enligt elektrostatiken ger laddningen upphov till ett elektriskt fält med fältstyrkan

$$E(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x-a}{|x-a|^3}=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x-a)^2} & \text{om} \quad x>a\\ -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x-a)^2} & \text{om} \quad x<a,\end{cases}$$

där ε_0 är en fysikalisk konstant (permittiviteten i vakuum). Arbetet som krävs för att flytta en annan laddning Q från $x=b_1$

till $x=b_2$ (på samma sida om $x=a$) ges av

Q multiplicerat med potentialskillnaden $V(b_1)-V(b_2)$,

där

$$V(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|x-a|}+C=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x-a}+C & \text{om } x>a\\ -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x-a}+C & \text{om } x<a\end{cases}$$

och C är en konstant. Oavsett värdet på C

blir

$$V'(x)=\begin{cases}D[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot(x-a)^{-1}+C] & \text{om } x>a\\ D[-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot(x-a)^{-1}+C] & \text{om } x<a\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$V'(x)=\begin{cases}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x-a)^2} & \text{om } x>a\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x-a)^2} & \text{om } x<a,\end{cases}$$

eller med andra ord $V'(x)=-E(x)$.

Potentialen är alltså en primitiv funktion

till $-E(x)$.