Mårten Wadenbäck

Räkneregler och standardintegraler

För obestämda integraler har vi linearitet, dvs

Sats: (i) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(ii) $\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$ om k är konstant.

Bevis: (i) Om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ och $G(x)$ är en primitiv till $g(x)$ så är

$$\int f(x)dx = F(x)+C_1 \quad \text{och} \quad \int g(x)dx = G(x)+C_2$$

för konstanter C_1 och C_2. Vi får nu

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+C_1 + G(x)+C_2 = [C=C_1+C_2] =$$
$$= F(x)+G(x)+C = \int (f(x)+g(x))dx.$$

(ii) Om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ så är $D[kF(x)] = kf(x)$ för varje konstant k.

Alltså är $kF(x)$ en primitiv till $kf(x)$, och den obestämda integralen blir

$$k\int f(x)dx = k(F(x)+C_1) = kF(x) + \underbrace{kC_1}_{=C}.$$

Deriveringsregeln för potensfunktioner säger att

$$D[x^{p+1}] = (p+1)x^p \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} D[x^{p+1}] = x^p \Leftrightarrow D\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right] = x^p$$

för alla konstanter p. Detta ger oss regeln

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad \text{för alla } p \neq -1.$$

För $p = -1$ får vi $\int x^p dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

som vi såg förra föreläsningen.

Exempel: Bestäm $\int (x\sqrt{2x} - 3x^4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{3}) dx$.

Vi skriver om den obestämda integralen

$$\int (\sqrt{2} \cdot x^{3/2} - 3x^4 + \frac{1}{x} + x^{-2} - \frac{8}{3}) dx = [\text{linearitet}] =$$

$$= \sqrt{2} \int x^{3/2} dx - 3\int x^4 dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - \frac{8}{3} \int 1\, dx =$$

$$= \sqrt{2}\, \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 3 \cdot \frac{x^5}{5} + \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{8}{3}x + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{5} x^{5/2} - \frac{3}{5}x^5 + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{8}{3}x + C.$$

Anmärkning: Det räcker med en konstant även om det är flera obestämda integraler.

Exempel: Funktionen $f(x)$ har derivatan

$f'(x) = (x^2+1)^2$ och funktionens graf

går genom punkten $(2, 10)$. Bestäm $f(x)$.

Eftersom $f(x)$ är en primitiv funktion till

$f'(x)$ är

$$f(x) = \int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4+2x^2+1) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$$

för någon konstant C. Insättning av

$x=2$ ger $10 = f(2) = \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 + C = \frac{96+80+30}{15} + C,$

så $C = 10 - \frac{206}{15} = \frac{150-206}{15} = -\frac{56}{15}.$

Alltså är $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x - \frac{56}{15}.$

En användbar räkneregel får vi genom att låta

$g(x) = \ln|f(x)|$ för någon deriverbar och nollskild

funktion $f(x)$. Vi får då $g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$

så $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$

Exempel: Vi kan nu bestämma alla primitiver till $\tan x$ enligt

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

Vidare kan vi skriva ned följande standardintegraler:

(i) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(ii) $\int \sin x \, dx = \cos x + C$

(iii) $\int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(iv) $\int e^x dx = e^x + C$

(v) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ för $a>0$, $a \neq 1$

(vi) $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(vii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(viii) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

Exempel: Bestäm $\int \frac{x^5+x+2}{x^2+1}\,dx$.

Vi börjar med att utföra polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
 & = x^3 - x \\
x^2+1 & \cancel{x^5} + x + 2 \\
 & -(\cancel{x^5} + x^3) \\
\hline
 & \cancel{-x^3} + \cancel{x} + 2 \\
 & -(\cancel{-x^3} - x) \\
\hline
 & 2x+2
\end{array}
$$

Nu är $\int \frac{x^5+x+2}{x^2+1}\,dx = \int \left(x^3 - x + \frac{2x+2}{x^2+1}\right) dx =$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x+2}{x^2+1}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \ln|x^2+1| + 2\arctan x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1) + 2\arctan x + C.$$

Standardintegralerna används ofta tillsammans med följande räkneregel: $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$, där $a \neq 0$ och b är konstanter och $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

Varning: Regeln fungerar bara om a är konstant! Detta är ett väldigt vanligt fel.

Exempel: Bestäm en primitiv $F(t)$ till funktionen

$$f(t) = 2e^{4t-1} - \frac{3}{3+(t+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} \quad \text{så att} \quad F(0)=0.$$

Vi börjar med att skriva om så att vi ser vilka standard integraler och vilka värden på a och b vi skall använda i var och en:

$$\int f(t)\,dt = 2\int e^{4t-1}\,dt - 3\int \frac{dt}{3+(t+1)^2} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}},$$

där

(i) $$2\int e^{4t-1}\,dt = 2\int e^{4t}\cdot e^{-1}\,dt = \frac{2}{e}\int e^{4t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{e}\cdot\frac{e^{4t}}{4} + C_1 = \frac{1}{2}\cdot e^{4t-1} + C_1 \qquad (a=4,\ b=0)$$

(ii) $$-3\int \frac{dt}{3+(t+1)^2} = -\cancel{3}\int \frac{dt}{\cancel{3}\left(1+\frac{(t+1)^2}{3}\right)} = -\int \frac{dt}{1+\frac{(t+1)^2}{(\sqrt{3})^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_2 \qquad \left(a=\frac{1}{\sqrt{3}},\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(iii) $$2\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \cancel{2}\int \frac{dt}{\cancel{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{1-t^2/4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + C_3 = 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + C_3 \qquad \left(a=\frac{1}{2},\ b=0\right)$$

Sammanslaget får vi nu (om $C_1+C_2+C_3=C$)

$$F(t)=\int f(t)\,dt=\frac{1}{2}e^{4t-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)+C,$$

och anpassning av konstanten ger

$$0=F(0)=\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C\Leftrightarrow$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2e}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2e},\ \text{så}$$

$$F(t)=\frac{1}{2}e^{4t-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2e}.$$

Exempel: Bestäm $\int \sin|3x-1|\,dx$.

Absolutbelopp delas (nästan) alltid upp i två fall:

$$\sin|3x-1|=\begin{cases}\sin(3x-1) & \text{då } 3x-1\geq 0\\ \sin(1-3x) & \text{då } 3x-1<0.\end{cases}$$

Därför blir

$$\int \sin|3x-1|\,dx=\begin{cases}\frac{-\cos(3x-1)}{3}+C_1 & \text{då } x\geq\frac{1}{3}\\ \frac{-\cos(1-3x)}{-3}+C_2 & \text{då } x<\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Doch kan inte C_1 och C_2 väljas

oberoende av varandra. Om

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C_1 & \text{då } x \geq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\cos(1-3x) + C_2 & \text{då } x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

så är $F(x)$ deriverbar, och alltså kontinuerlig. Speciellt måste därför

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} F(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} F(x) = F(\tfrac{1}{3}),$$

dvs $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{1}{3}\cos(1-3x)+C_2 = \frac{1}{3}+C_2 = F(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}+C_1 \Leftrightarrow$

$C_2 = C_1 - \frac{2}{3}$. Alltså måste

$$\int \sin|3x-1|\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C & \text{då } x \geq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\cos(1-3x) - \frac{2}{3} + C & \text{då } x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$