Mårten Wadenbäck

Primitiva funktioner, repetition och fortsättning

Utöver de standardprimitiver som fås direkt ur deriveringsresultaten för de elementära funktionerna har vi sett ett par viktiga regler, nämligen

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \\ \text{(ii)} & \int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad \text{då } k \text{ konstant}\end{array}\right\} \text{linearitet}$$

(iii) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

(iv) $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ då $a \neq 0$ och b är konstanter och $F'(x) = f(x)$.

Med dessa regler kan vi bestämma ganska många primitiver.

Exempel: Bestäm en primitiv funktion till $(4x+3)^7$.

Här kan vi antingen utveckla (det blir jobbigt, men går) eller använda (iv). Använder vi (iv) får vi att $\displaystyle\int (4x+3)^7\,dx = \frac{(4x+3)^8}{8\cdot 4} + C = \frac{(4x+3)^8}{32} + C.$

Exempel: Bestäm $\int \frac{t^3+2t^2+4t+3}{t^2+2t+4}\,dt$.

Det är alltid en bra idé att se till så att täljarens gradtal är lägre än nämnarens, vilket kan göras med polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l} & = t \\ t^2+2t+4 & t^3+2t^2+4t+3 \\ & -(t^3+2t^2+4t) \\ \hline & \quad\quad\quad\quad 3 \end{array}$$

Alltså är $\int \frac{t^3+2t^2+4t+3}{t^2+2t+4}\,dt = \int \left(t+\frac{3}{t^2+2t+4}\right)dt$,

och svårigheten består nu i att hantera $\int \frac{3}{t^2+2t+4}\,dt$.

Kvadratkomplettering av nämnaren leder till

$t^2+2t+4=(t+1)^2+3$, och nu blir

$$\int \frac{3}{t^2+2t+4}\,dt = \int \frac{3}{(t+1)^2+3}\,dt = \int \frac{dt}{\frac{(t+1)^2}{3}+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = [\text{regel (iv) ovan}] =$$

$$= \frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C_1 = \sqrt{3}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C_1,$$

så

$$\int \frac{t^3+2t^2+4t+3}{t^2+2t+4}\,dt = \int\left(t+\frac{3}{t^2+2t+4}\right)dt = \frac{t^2}{2}+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Exempel: Beräkna $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right)^2 dx$. Utveckling av kvadraten ger $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right)^2 dx = \int \left(\frac{9}{x} - 6\sqrt{x} + x^2\right) dx =$

$$= 9\ln|x| - \frac{6x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^3}{3} + C = 9\ln|x| - 4x\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Ibland går det att använda trigonometriska samband för att bestämma primitiver.

Exempel: Vi har att $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ och $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, så vi får att

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

och

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Exempel (avancerat): Bestäm $\int \cos^3 x \, dx$.

Med hjälp av Eulers formler kan vi skriva om alla polynom i $\sin x$ och $\cos x$ på en form som vi kan hantera. I just detta fallet blir

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos x\right).$$

Därför blir

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{4}\int (\cos(3x) + 3\cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(3x)}{3} + 3\sin x\right) + C = \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3}{4}\sin x + C.$$

Funktioner som ges av olika uttryck på olika delintervall går att hantera genom att ta en primitiv funktion på vardera delintervall och sedan se till så att funktionen blir kontinuerlig (eftersom den är deriverbar skall den vara kontinuerlig).

Exempel: Beräkna $\int f(x)dx$ där $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{om } x \leq 0 \\ -\sin(3x) & \text{om } 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x+2} & \text{om } \pi < x. \end{cases}$

Vi får

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x + C & \text{om } x \leq 0 \\ \frac{\cos(3x)}{3} + C_2 & \text{om } 0 < x \leq \pi \\ \ln|x+2| + C_3 & \text{om } \pi < x, \end{cases}$$

men det går inte att välja C_2 och C_3 hur som helst! Varje primitiv funktion till $f(x)$ måste vara kontinuerlig, och om vi har valt en av konstanterna (säg, C) så bestäms även de två andra.

Det måste nämligen gälla att

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{3}+x+C = C = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(3x)}{3}+C_2 = \frac{1}{3}+C_2,$$

så att $C_2 = C-\frac{1}{3}$. Sedan har vi på samma sätt

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} f(x) \iff$$

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos(3x)}{3}+C-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}+C-\frac{1}{3} = \lim_{x\to\pi^+} \ln|x+2|+C_3 = \ln|\pi+2|+C_3,$$

så $C_3 = C-\frac{2}{3}-\ln(\pi+2)$.

Sammanfattningsvis blir

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3}+x+C & \text{om } x\le 0 \\ \frac{\cos(3x)}{3}-\frac{1}{3}+C & \text{om } x<0\le\pi \\ \ln\left(\frac{x+2}{\pi+2}\right)-\frac{2}{3}+C & \text{om } \pi<x. \end{cases}$$

Exempel: Bestäm $\int |e^{2x+1}-1|\,dx$.

Absolutbelopp delas (nästan) alltid upp i olika fall:

$$|e^{2x+1}-1| = \begin{cases} e^{2x+1}-1 & \text{om } e^{2x+1}-1\ge 0 \\ 1-e^{2x+1} & \text{om } e^{2x+1}-1<0. \end{cases}$$

Brytpunkten ges av $e^{2x+1}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}=1 \Leftrightarrow 2x+1=\ln 1 \Leftrightarrow$ $x=-\frac{1}{2}$. Vi bestämmer en primitiv på vardera intervall:

$$\int |e^{2x+1}-1|\,dx = \begin{cases} \frac{e^{2x+1}}{2}-x+C & \text{om} \quad x \geq -\frac{1}{2} \\ x-\frac{e^{2x+1}}{2}+C_2 & \text{om} \quad x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Som tidigare ger kontinuiteten att

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}+} \frac{e^{2x+1}}{2}-x+C = \frac{e^0}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+C = 1+C$$

skall vara lika med $\lim_{x\to -\frac{1}{2}-} x-\frac{e^{2x+1}}{2}+C_2 = -\frac{1}{2}-\frac{e^0}{2}+C_2 = -1+C_2$,

dvs $C_2 = C+2$. Alltså är

$$\int |e^{2x+1}-1|\,dx = \begin{cases} \frac{e^{2x+1}}{2}-x+1+C & \text{om} \quad x \geq -\frac{1}{2} \\ x-\frac{e^{2x+1}}{2}+2+C & \text{om} \quad x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ett vanligt fel är att tro att regeln $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C$ gäller mer generellt, dvs "dela på inre derivatan".

Exempel: Det är inte sant att $\int \cos\sqrt{x}\,dx =$

$$= \frac{\sin\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}+C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C \quad \text{eller att}$$

$$\int e^{x^3}dx = \frac{e^{x^3}}{3x^2}+C.$$ Detta kan vi övertyga

oss om genom att kontrollera vad derivatorna blir:

$$D[2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C] = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \cos\sqrt{x} \neq \cos\sqrt{x}$$

och $$D\left[\frac{e^{x^3}}{3x^2}+C\right] = \frac{3x^2e^{x^3}\cdot 3x^2 - e^{x^3}\cdot 6x}{9x^4} =$$

$$= e^{x^3} - \frac{2e^{x^3}}{3x^3} \neq e^{x^3}.$$