Mårten Wadenbäck

Partialintegration

Ibland behöver vi hitta primitiva funktioner till produkter, $f(x)g(x)$.

Sats (Partialintegration): Låt $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$, och låt $g(x)$ vara deriverbar. Låt även $f(x)$ och $g'(x)$ vara kontinuerliga.

Då gäller

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Bevis: Enligt produktregeln är

$$D[F(x)g(x)] = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \iff$$

$$D[F(x)g(x)] = f(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Genom att ta en primitiv till respektive sida får vi

$$F(x)g(x) + C = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx \iff$$

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) + C - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

men C kan bakas in i den obestämda integralen, så

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Exempel: Beräkna $\int x e^{-3x}\,dx$.

Vi försöker partialintegrera med $f(x)=x$ och $g(x)=e^{-3x}$:

$$\int x e^{-3x}\,dx = \frac{x^2}{2}e^{-3x} - \int \frac{x^2}{2}\cdot(-3)e^{-3x}\,dx.$$

Detta ledde till en krångligare integral!

Om vi istället tar $f(x)=e^{-3x}$ och $g(x)=x$ får vi

$$\int x e^{-3x}\,dx = -\frac{e^{-3x}}{3}\cdot x - \int -\frac{e^{-3x}}{3}\cdot 1\cdot dx =$$

$$= -\frac{xe^{-3x}}{3} + \int \frac{e^{-3x}}{3}\,dx = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C.$$

Ibland går det att välja $f(x)$ och $g(x)$ på flera olika sätt som fungerar, men ibland är det bara ett sätt som fungerar!

Exempel: Bestäm $\int (x-2)^2 \sin(\pi x)\,dx$.

Både $(x-2)^2$ och $\sin(\pi x)$ klarar vi av att både derivera och hitta primitiv till, men om vi väljer polynomet som $g(x)$ så kommer det att få lägre grad (enklare). Vi testar:

$$\int (x-2)^2 \sin(\pi x)\,dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\cdot(x-2)^2 - \int -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\cdot 2(x-2)\,dx =$$

$$= -\frac{(x-2)^2}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}\int (x-2)\cos(\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{(x-2)^2}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\cdot(x-2) - \int \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{(x-2)^2}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{2(x-2)}{\pi^2}\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi^2}\int \sin(\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{(x-2)^2}{\pi}\cdot\cos(\pi x) + \frac{2(x-2)}{\pi^2}\sin(\pi x) + \frac{2}{\pi^3}\cos(\pi x) + C$$

Partialintegration är ofta användbart även då integranden inte från början ser ut att vara en produkt.

Exempel: Vilka funktioner har derivatan $\ln x$?

Vi skriver $\ln x = 1\cdot \ln x$ och partialintegrerar:

$$\int 1\cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

Exempel: Bestäm $\int (\ln x)^2 \, dx$.

Från förra exemplet har vi $\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$,

så om vi tar $f(x) = \ln x$ och $g(x) = \ln x$ och

partialintegrerar får vi

$$\int \ln x \cdot \ln x \, dx = (x\ln x - x)\ln x - \int (x\ln x - x)\cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - x\ln x - \int (\ln x - 1) \, dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - x\ln x - (x\ln x - x - x) + C =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$$

Exempel: Genom att trolla fram en etta får vi

$$\int \arctan x \, dx = \int 1 \cdot \arctan x \, dx =$$

$$= x\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Det händer ibland att vi, efter att ha partialintegrerat länge, får tillbaka nästan samma integral som vi började med. Detta kan vara rihtigt bra!

Exempel: Beräkna $\int e^{-x}\cos(3x)\,dx$.

Integralen innehåller en produkt, så vi försöker med partialintegration. Tag exempelvis $f(x)=e^{-x}$ och $g(x)=\cos(3x)$. Detta ger

$$\int e^{-x}\cos(3x)\,dx = -e^{-x}\cos(3x) - \int -e^{-x}(-\sin(3x))\cdot 3\,dx =$$

$$= -e^{-x}\cos(3x) - 3\int e^{-x}\sin(3x)\,dx =$$

$$= -e^{-x}\cos(3x) - 3\left(-e^{-x}\sin(3x) - \int -e^{-x}\cdot 3\cos(3x)\,dx\right) =$$

$$= 3e^{-x}\sin(3x) - e^{-x}\cos(3x) - 9\int e^{-x}\cos(3x)\,dx.$$

Om $\int e^{-x}\cos(3x)\,dx = P(x)$ är alltså

$$P(x) = 3e^{-x}\sin(3x) - e^{-x}\cos(3x) - 9P(x) \Leftrightarrow$$

$$10P(x) = 3e^{-x}\sin(3x) - e^{-x}\cos(3x) \Leftrightarrow$$

$$P(x) = \frac{e^{-x}}{10}(3\sin(3x) - \cos(3x)).$$

Vi kan förstås lägga till olika konstanter, så

$$\int e^{-x}\cos(3x)\,dx = \frac{e^{-x}}{10}(3\sin(3x) - \cos(3x)) + C.$$

Exempel: Beräkna $\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$.

Vi partialintegrerar och får

$$\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3}\cos(5x) - \int -\frac{\cos(3x)}{3}\cdot(-5\sin(5x))\,dx$$

$$= -\frac{\cos(3x)\cos(5x)}{3} - \frac{5}{3}\int \cos(3x)\sin(5x)\,dx =$$

$$= -\frac{\cos(3x)\cos(5x)}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{\sin(3x)}{3}\sin(5x) - \int \frac{\sin(3x)}{3}\cdot 5\cos(5x)\,dx\right) =$$

$$= -\frac{\cos(3x)\cos(5x)}{3} - \frac{5\sin(3x)\sin(5x)}{9} + \frac{25}{9}\int \sin(3x)\sin(5x)\,dx.$$

Som i förra exemplet kan vi lösa ut den obestämda integralen $P(x) = \int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{25}{9}\right)}_{-\frac{16}{9}} \int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = -\frac{\cos(3x)\cos(5x)}{3} - \frac{5\sin(3x)\sin(5x)}{9} + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{3\cos(3x)\cos(5x)}{16} + \frac{5\sin(3x)\sin(5x)}{16} + C.$$

Exempel: Bestäm $\int x \ln x\,dx$.

Partialintegration ger

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$