Mårten Wadenbäck

Variabelsubstitution

Kedjeregeln låter oss derivera sammansatta funktioner,

$$\frac{d}{dt}\left(F(g(t))\right) = F'(g(t))\cdot g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t),$$

där $F(t)$ är deriverbar med $F'(t)=f(t)$ och $g(t)$ är deriverbar.

Alla primitiver, med avseende på t, till $f(g(t))\cdot g'(t)$ blir alltså $\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C$. Samtidigt, om $x=g(t)$, så är $\frac{d}{dx}\left(F(g(t))\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = F'(x) = f(x)$, så $\int f(x)\,dx = F(x) + C = F(g(t)) + C$. Alltså gäller

Sats (Variabelsubstitution): Om $f(x)$ är kontinuerlig, $g(t)$ är deriverbar med kontinuerlig derivata, och $V_g \subseteq D_f$, så är

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

där $x=g(t)$.

Exempel: Vi försöker beräkna $\int (2+3t^2)^{19} \cdot 6t \, dt$

utan att utveckla parentesen. Om vi tar

$x = g(t) = 2+3t^2$ och $f(x) = x^{19}$ får vi

$$\int (2+3t^2)^{19} \cdot 6t \, dt = \begin{bmatrix} x = 2+3t^2 \\ \frac{dx}{dt} = 6t \\ dx = 6t\,dt \end{bmatrix} = \int x^{19} dt =$$

$$= \frac{x^{20}}{20} + C = \frac{(2+3t^2)^{20}}{20} + C.$$

Kontroll visar att $D\left[\frac{(2+3t^2)^{20}}{20} + C\right] = (2+3t^2)^{19} \cdot 6t.$

Exempel: Beräkna $\int x\sqrt{4-x^2}\, dx.$

Det jobbiga är $\sqrt{4-x^2}$. Vi kan hantera $\sqrt{u}$, så vi testar med $u = 4-x^2$:

$$\int x\sqrt{4-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} u = 4-x^2 \\ \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x\,dx \end{bmatrix} = \int \sqrt{4-x^2} \cdot \frac{-2x\,dx}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{2}\int u^{1/2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= -\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} + C.$$

Kontroll med kedjeregeln ger

$$D\left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} + C\right] = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(4-x^2)^{1/2}}{3} \cdot (-2x) = x\sqrt{4-x^2}.$$

Det finns ofta fler än ett variabelbyte som fungerar, exempelvis kunde vi gjort

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} v=\sqrt{4-x^2}=(4-x^2)^{1/2} \\ \frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) \\ dv=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \\ -v\,dv=x\,dx \end{array}\right] =$$

$$=\int v\cdot(-v\,dv) = -\int v^2\,dv = -\frac{v^3}{3}+C = -\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}+C,$$

eller satt $x=2\sin w$, så $dx=2\cos w\,dw$, och fått

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\sin w\sqrt{4-4\sin^2 w}\cdot 2\cos w\,dw =$$

$$=4\int \sin w\cdot\cos w\cdot\sqrt{4\cos^2 w}\,dw = [\text{använd } \cos w\geq 0] =$$

$$=8\int \cos^2 w\cdot\sin w\,dw = \left[\begin{array}{l} z=2\cos w \\ dz=-2\sin w\,dw \end{array}\right] =$$

$$=-\int z^2\,dz = -\frac{z^3}{3}+C.$$

För att byta tillbaka till x använder vi att

$$x^2+z^2=4\sin^2 w+4\cos^2 w=4 \Leftrightarrow z^2=4-x^2 \Leftrightarrow z=\underset{(-)}{+}\sqrt{4-x^2},$$

så $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{z^3}{3}+C = -\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}+C.$

Exempel: Bestäm $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.

Vi kan lösa detta genom att sätta $u=e^x$:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \begin{bmatrix} u=e^x \\ du=e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{1+u} = \ln|u+1| + C =$$

$$= \ln(e^x+1) + C,$$

eller genom att sätta $v=1+e^x$:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \begin{bmatrix} v=1+e^x \\ dv=e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C =$$

$$= \ln(1+e^x) + C.$$

Ibland behövs det omskrivning innan variabelbytet.

Exempel: Bestäm $\int \cos^5 x\,dx$.

Vi skriver om $\int \cos^5 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx$

och använder trigonometriska ettan,

$$\int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx.$$

Lämpligt variabelbyte verkar vara $t=\sin x$,

eftersom $\cos x$ är en misstänkt "inre derivata".

Alltså blir

$$\int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int (1-t^2)^2\,dt = \int (1-2t^2+t^4)\,dt =$$

$$= t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Exempel: I integralen $\int x^3 e^{x^2} dx$ är x^2 i exponenten oroande, så vi byter ut den:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2} \cdot 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int u e^u du = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(ue^u - \int e^u du\right) = \frac{ue^u}{2} - \frac{e^u}{2} + C =$$

$$= \frac{e^u}{2}(u-1) + C = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + C.$$

Kontroll: $D\left[\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C\right] = \frac{e^{x^2}}{2}\cdot 2x(x^2-1) + \frac{e^{x^2}}{2}\cdot 2x = x^3 e^{x^2}.$

Regeln $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ fås som specialfall av variabelbytet $u = ax+b$. Då är nämligen

$$\int f(ax+b)\,dx = \begin{bmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{bmatrix} = \int f(u)\,\frac{du}{a} =$$

$$= \frac{F(u)}{a} + C = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

Exempel: Använd variabelbytet $t = x+\sqrt{1+x^2}$ för att beräkna $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Om $t = x+\sqrt{1+x^2}$ får vi

$$t = x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow t-x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2-2tx+x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow$$

$$t^2-1 = 2tx \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$$

och

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2}{4t^2} = \frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = \frac{t^2+1}{2t^2}.$$

Dessutom är $\sqrt{1+x^2} = t-x = t-\frac{t^2-1}{2t} = \frac{2t^2}{2t}-\frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$.

Alltså kan vi beräkna

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{t^2-1}{2t} \\ dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C =$$

$$= \ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.$$

Exempel: Bestäm $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

Eftersom $\ln x$ är besvärligt inuti cosinus gör vi

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array}\right] = \int \cos u\, du =$$

$$= \sin u + C = \sin(\ln x) + C.$$