MVE Matematik, del D, våren 2018, föreläsning 9

Mårten Wadenbäck

Partialbråksuppdelning

Vi har redan smygtittat på metoder för att hantera primitiva funktioner till särskilt enkla rationella funktioner, där nämnaren är $x-a$ eller $(x-a)^2+b^2$. Då (och i allmänhet) hjälper det att börja med polynomdivision.

Exempel: Bestäm $\int \frac{x^4+3x}{x^2+4x+8}\,dx$.

Polynomdivision ger

$$
\begin{array}{r|l}
 & = x^2-4x+8 \\
\hline
x^2+4x+8 & x^4+3x \\
 & -(x^4+4x^3+8x^2) \\
\hline
 & -4x^3-8x^2+3x \\
 & -(-4x^3-16x^2-32x) \\
\hline
 & 8x^2+35x \\
 & -(8x^2+32x+64) \\
\hline
 & 3x-64
\end{array}
$$

så

$$\int \frac{x^4+3x}{x^2+4x+8}\,dx = \int \left(x^2-4x+8 + \frac{3x-64}{x^2+4x+8}\right)dx.$$

Polynomet är inga problem, och integralen

$\int \frac{3x-64}{x^2+4x+8}dx$ hanterar vi genom att kvadratkomplettera

nämnaren:

$$\int \frac{3x-64}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{3x-64}{(x+2)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{3x-64}{\frac{(x+2)^2}{4}+1}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3x-64}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}dx = \begin{bmatrix} u = \frac{x+2}{2} & x = 2u-2 \\ du = \frac{dx}{2}, & dx = 2du \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{6u-6-64}{u^2+1}\cdot 2du =$$

$$= \int \frac{3u-35}{u^2+1}du = \frac{3}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du - 35\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|u^2+1| - 35\arctan u + C.$$

Alltså är

$$\int \frac{x^4+3x}{x^2+4x+8}dx = \frac{x^3}{3}+2x^2+8x+\frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1\right) - 35\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)+C.$$

Vad gör vi om nämnarpolynomet inte är $x-a$ eller $(x-a)^2+b^2$? Idé: lägg ihop sådana enklare bråk tills vi får rätt nämnare!

Exempel: Lägg ihop tre enklare rationella funktioner så att resultatet får nämnaren $(x+3)(2-3x)x$.

Addition av bråk fungerar som bekant

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2},$$

så resultatets nämnare blir produkten av de två partialbråkens nämnare.

Alltså borde

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2-3x} + \frac{1}{x}$$

ge rätt nämnare. Vi får

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2-3x} + \frac{1}{x} = \frac{2-3x+x+3}{(x+3)(2-3x)} + \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(5-2x)x + (x+3)(2-3x)}{(x+3)(2-3x)x} = \frac{5x-2x^2+2x+6-3x^2-9x}{(x+3)(2-3x)x} =$$

$$= \frac{-5x^2-2x+6}{(x+3)(2-3x)x}.$$

Exempel: Bestäm $\int \frac{-5x^2-2x+6}{(x+3)(2-3x)x}\,dx$.

Vi utnyttjar partialbråksuppdelningen från föregående exempel och får

$$\int \frac{-5x^2-2x+6}{(x+3)(2-3x)x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2-3x} + \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \ln|x+3| + \ln|2-3x| + \ln|x| + C.$$

Vad gör vi om vi har en annan täljare? Byt ut "ettorna" i partialbråken mot andra tal.

Exempel: Skriv $\frac{10x^2-21x+12}{(x+3)(2-3x)x}$ som en summa av partialbråk. Nämnaren är samma som i de senaste exemplen, så vi utgår från liknande bråk och ansätter

$$\frac{10x^2-21x+12}{(x+3)(2-3x)x} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2-3x} + \frac{C}{x} =$$

$$= \frac{A(2-3x)x + B(x+3)x + C(x+3)(2-3x)}{(x+3)(2-3x)x} =$$

$$= \frac{A(2x-3x^2) + B(x^2+3x) + C(6-7x-9x^2)}{(x+3)(2-3x)x}.$$

Detta skall gälla för alla x, och eftersom nämnar polynomen är lika måste även täljarpolynomen vara det. Identifiering av koefficienterna ger

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ \text{konstant}: \end{array} \begin{cases} -3A+B-3C=10 \\ 2A+3B-7C=-21 \\ 6C=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3A+B-3C=10 \\ 11B-27C=-43 \\ C=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3A+B=16 \\ 11B=11 \\ C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=1 \\ C=2. \end{cases}$$

Vi har alltså

$$\frac{10x^2-21x+12}{(x+3)(2-3x)x} = -\frac{5}{x+3} + \frac{1}{2-3x} + \frac{2}{x}.$$

Exempel: Partialbråksuppdela $\dfrac{5x-7}{x^2-4x-5}$.

Vi får börja med att faktorisera nämnaren för att se vilka partialbråk vi skall ansätta. Nollställena ges av $x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{4-(-5)} \Leftrightarrow x=2\pm 3$, och faktorsatsen menar nu på att

$$x^2-4x-5=(x+1)(x-5).$$

Nu ansätter vi

$$\frac{5x-7}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x+1)}{(x+1)(x-5)}$$

och identifierar koefficienter

$$\begin{array}{l} x: \\ \text{konstant:} \end{array} \begin{cases} A+B=5 \\ -5A+B=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 6B=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3. \end{cases}$$

Alltså är $\frac{5x-7}{x^2-4x-5} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-5}$.

Ibland går nämnaren inte att faktorisera med endast reella förstagradsfaktorer.

Exempel: Partialbråksuppdela $\frac{x^3-x^2+x-3}{x^4+x^2}$.

Vi börjar med att faktorisera nämnaren:

$x^4+x^2=x^2(x^2+1)$.

Eftersom x^2+1 saknar reella nollställen och har grad två går det inte att faktorisera vidare med reella faktorer.

Med inspiration från tidigare framgångar ansätter vi djärvt

$$\frac{x^3-x^2+x-3}{x^4+x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2}{x^2(x^2+1)}$$

och identifierar koefficienter:

$$\begin{array}{ll} x^3: & \\ x^2: & \\ x: & \\ \text{konstant}: & \end{array} \begin{cases} 0 = 1 \\ A+B = -1 \\ 0 = 1 \\ A = -3. \end{cases}$$

Detta system saknar lösning, så ansatsen fungerade inte. Vi testar istället

$$\frac{x^3-x^2+x-3}{x^4+x^2} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^3+x)+B(x^2+1)+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)},$$

som ger

$$\begin{array}{ll} x^3: & \\ x^2: & \\ x: & \\ \text{konstant}: & \end{array} \begin{cases} A+C = 1 \\ B+D = -1 \\ A = 1 \\ B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 0 \\ D = 2. \end{cases}$$

Alltså är

$$\frac{x^3-x^2+x-3}{x^4+x^2} = \frac{x-3}{x^2} + \frac{2}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^2+1}.$$