Mårten Wadenbäck

Partialbråksuppdelning, fortsättning

Ibland, typiskt när vi bara har enkla (i motsats till upprepade) förstagradsfaktorer i nämnaren, fungerar "handpåläggning" för att snabbt bestämma koefficienterna på partialbråken.

Exempel: Partialbråksuppdela $\frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+2x}$.

Vi börjar med att faktorisera nämnaren. $x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2)$, och x^2+3x+2 försöker vi faktorisera vidare genom att hitta dess nollställen med pq-formeln: $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}$ $\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$, så $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

Ansatsen blir

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

Handpåläggning fungerar som så att vi tänker oss att båda sidorna multipliceras med x och att vi sedan sätter in $x=0$, vilket ger $A=\frac{3}{2}$. På samma sätt fås B genom att multiplicera med $x+1$ och sätta $x=-1$, vilket genast ger $B=-2$. Metoden ger även $C=\frac{3}{2}$, så $\frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{3/2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{3/2}{x+2}$.

Varning! Handpåläggning kombinerat med en galen ansats ger, utan att klaga, värden på koeffienterna i ansatsen. Felaktiga ansatser upptäcks alltså inte med den metoden!

Om nämnaren innehåller $(x-a)^n$ för något heltal $n\geq 1$ ger detta upphov till följande partialbråk

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x-a)^n}\quad\left(\text{eller } \frac{B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\dots+B_n}{(x-a)^n}\right),$$

och om nämnaren innehåller $((x-a)^2+b^2)^n$ behövs

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2}+\frac{A_2x+B_2}{((x-a)^2+b^2)^2}+\dots+\frac{A_nx+B_n}{((x-a)^2+b^2)^n}.$$

Vi har successivt arbetat fram följande metod för att hitta primitiver till rationella funktioner:

Steg 1: Se till så att vi arbetar med ett äkta bråk (lägre grad i täljaren än i nämnaren). Är det inte bra från början, utför polynomdivision.

Steg 2: Faktorisera nämnaren så långt det går i reella faktorer.

Steg 3: Utgå från faktoriseringen för att ansätta partialbråk enligt ovan, och bestäm koefficienterna (ekvationssystem, handpåläggning...).

Steg 4: Bestäm en primitiv till vart och ett av partialbråken.

Anmärkning: Steg 4 kan vara svårt då vi har att göra med $\dfrac{A_n x + B_n}{((x-a)^2+b^2)^n}$ för $n>1$. Det finns metoder för detta, men vi går inte in på dem.

Exempel: Beräkna $\int \frac{2-4x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

Här använder vi partialbråksuppdelning och ansatsen som behövs blir

$$\frac{2-4x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+Cx(x+1)^2+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1)+C(x^3+2x^2+x)+D(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{l} x^3: \\ x^2: \\ x: \\ \text{konstant:} \end{array} \begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 0 \\ A + C + 2D = -4 \\ A + B + D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B + C + D = 0 \\ 2D = -4 \\ B - C + D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + C + D = 0 \\ -2C = 2 \\ D = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -1 \\ D = -2. \end{cases}$$

Detta ger $\frac{2-4x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1},$

så $\displaystyle\int \frac{2-4x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int 3(x+1)^{-2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 2\ln|x+1| + \frac{3(x+1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctan x + C =$$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C.$$

Exempel: Gör en lämplig ansats för att partialbråksuppdela $\dfrac{5x^2+x-3}{x^3(x+2)^2(x^2+1)^3}$.

Vi har många upprepade faktorer i nämnaren.

Ansatsen blir

$$\frac{5x^2+x-3}{x^3(x+2)^2(x^2+1)^3} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}}_{\text{från } x^3} + \underbrace{\frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2}}_{\text{från } (x+2)^2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{Fx+G}{x^2+1} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^2} + \frac{Jx+K}{(x^2+1)^3}}_{\text{från } (x^2+1)^3}.$$