Mårten Wadenbäck

Primitiva funktioner, sammanfattning

Primitiv funktion är "motsatsen" till derivata, dvs

Definition: Låt f vara definierad i ett intervall I.

Om funktionen F uppfyller $F'(x)=f(x)$ för alla $x \in I$ kallas F för en primitiv till f på intervallet I.

Om det finns en primitiv funktion så finns det alltid oändligt många. Dessa skiljer endast på en konstant.

Sats: Om F och G är primitiva funktioner till f på intervallet I så gäller att

$$G(x) = F(x) + C$$

för alla $x \in I$, där C är en konstant.

Bevis: Låt $H(x) = G(x) - F(x)$, och derivera. Detta ger

$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ för alla $x \in I$.

Enligt följdsatsen till medelvärdessatsen är

$H(x) = C$ för alla $x \in I$, dvs $G(x) - F(x) = C \Leftrightarrow G(x) = F(x) + C$.

Uttrycket $\int f(x)dx$ kallas den <u>obestämda integralen</u> av $f(x)$, och betecknar alla primitiva funktioner till $f(x)$. Om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ så är alltså

$\int f(x)dx = F(x) + C$ för någon konstant C.

Obestämda integraler uppfyller linearitetsegenskapen:

(i) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(ii) $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$ för alla konstanter k.

Bevis av (i): Låt $F(x)$ vara en primitiv till $f(x)$ och låt $G(x)$ vara en primitiv till $g(x)$. Då är $\int f(x)dx = F(x)+C_1$ och $\int g(x)dx = G(x)+C_2$ för några konstanter C_1 och C_2. Alltså är

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+C_1+G(x)+C_2 = F(x)+G(x)+C,$$

där $C=C_1+C_2$. Detta beskriver alla primitiver till $f(x)+g(x)$, så

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

som önskat.

Utöver lineariteten har vi följande två räkneregler (som båda fås som specialfall av variabelsubstitution):

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

(ii) $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$ där $a \neq 0$ och

$F(x)$ är en primitiv till $f(x)$.

Vi har följande lista med standardprimitiver, som vi får gratis från motsvarande deriveringsregler:

(i) $\int x^p dx = \begin{cases} \frac{x^{p+1}}{p+1} + C & \text{om } p \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{om } p = -1 \end{cases}$

(ii) $\int e^x dx = e^x + C$

(iii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ där $a > 0$ och $a \neq 1$

(iv) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(v) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(vi) $\int (1 + \tan^2 x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(vii) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Som integralmotsvarigheten till produktregeln har vi

Sats (Partialintegration): Om $F(x)$ är en primitiv till den kontinuerliga funktionen $f(x)$, och $g(x)$ är deriverbar med kontinuerlig derivata $g'(x)$, så är

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Bevis: Enligt produktregeln är

$$D[F(x)g(x)] = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x),$$

och alltså är

$$f(x)g(x) = D[F(x)g(x)] - F(x)g'(x).$$

Integrerar vi bägge led får vi

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Exempel: Bestäm $\int (x^2+10x)e^{2x}\,dx$.

Vi tar $f(x)=e^{2x}$ och $g(x)=x^2+10x$, och partialintegrerar:

$$\int (x^2+10x)e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+10x) - \int \frac{e^{2x}}{2}(2x+10)\,dx =$$

$= \left[\text{partialintegrera igen med } f(x)=\frac{e^{2x}}{2} \text{ och } g(x)=2x+10\right] =$

Ibland behöver vi "trolla fram" en etta för att partialintegrera.

Exempel: Bestäm $\int \ln x \, dx$. Vi skriver

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Ibland får vi tillbaka samma integral vi började med.

Exempel: Bestäm $\int e^x \sin(2x) dx$.

Vi partialintegrerar två gånger med $f(x) = e^x$:

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - \int e^x \cdot 2\cos(2x) dx =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2\left(e^x \cos(2x) - \int e^x 2(-\sin(2x)) dx\right) =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x) dx.$$

Vi flyttar över $4\int e^x \sin(2x) dx$ till vänster sida (och lämnar en obestämd konstant kvar), så

$$5\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + K \iff$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + C$$

(där $C = \frac{K}{5}$).

Under vissa förutsättningar gäller formeln för variabelsubstitution:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt, \quad \text{där } x = g(t).$$

Exempel: Bestäm $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Det "jobbiga" är $\sqrt{x}$, så vi testar att byta ut det:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} & \frac{dx}{dt} = 2t \\ x = t^2, & dx = 2t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int e^t \cdot 2t\,dt = [\text{partialintegration}] =$$

$$= 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Exempel: Bestäm $\int \arcsin x\,dx$.

Vi trollar fram en etta och partialintegrerar:

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1 \cdot \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Integralen $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ hanterar vi genom att byta ut "det jobbiga", dvs $\sqrt{1-x^2}$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{1-x^2} \\ \frac{du}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{bmatrix} = \int du = -u + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Alltså är $\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Rationella funktioner $\frac{P(x)}{Q(x)}$, där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom, hanterar vi enligt följande metod:

Steg 1: Gör så att grad Q > grad P (polynomdividera om det inte redan är så).

Steg 2: Faktorisera nämnaren så långt det går i reella faktorer.

Steg 3: Utgå från faktoriseringen för att ansätta partialbråk, och lös ut konstanterna.

Steg 4: Bestäm en primitiv till vart och ett av partialbråken.

I steg 3 shall vi för varje faktor $(x-a)^n$ ansätta partialbråken $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

(som blir ett allmänt polynom av grad $n+1$ delat på $(x-a)^n$), och för varje faktor $((x-a)^2+b^2)^n$ shall vi ansätta

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{A_2x+B_2}{((x-a)^2+b^2)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{((x-a)^2+b^2)^n}.$$

Exempel: Bestäm $\int \frac{x^4+3x^2-3}{(x+1)x^4}\,dx$.

Nämnaren har grad fem, så vi slipper utföra polynomdivision. För partialbråksuppdelningen ansätter vi

$$\frac{x^4+3x^2-3}{(x+1)x^4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} =$$

$$= \frac{Ax^4 + B(x+1)x^3 + C(x+1)x^2 + D(x+1)x + E(x+1)}{(x+1)x^4} =$$

$$= \frac{Ax^4 + B(x^4+x^3) + C(x^3+x^2) + D(x^2+x) + E(x+1)}{(x+1)x^4}.$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{array}{r} x^4: \\ x^3: \\ x^2: \\ x: \\ \text{konstant}: \end{array} \begin{cases} A+B = 1 \\ B+C = 0 \\ C+D = 3 \\ D+E = 0 \\ E = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 3 \\ E = -3. \end{cases}$$

Nu är alltså

$$\int \frac{x^4+3x^2-3}{(x+1)x^4}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right)dx = \ln|x+1| - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x^3} + C.$$