MVE425 Matematik, del D, våren 2018, föreläsning 12 (1.)
Mårten Wadenbäck

Bestämd integral

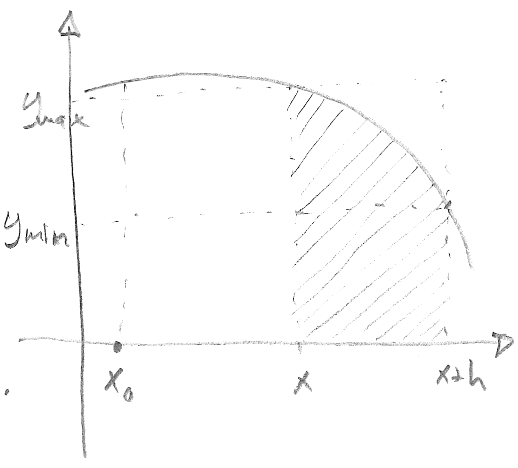
Vi börjar med att koppla ihop primitiva funktioner med begreppet area.

Sats (Areasatsen): Antag att $f(x) \geq 0$ är kontinuerlig i det öppna intervallet I. Antag vidare att $x_0 \in I$, $x \in I$, och $x_0 \leq x$. Låt $A(x)$ vara arean som begränsas av x-axeln, $f(x)$, samt de vertikala linjerna genom x_0 respektive x.

Då gäller $A'(x) = f(x)$ för $x \geq x_0$.

Bevis: Låt $h > 0$ vara tillräckligt litet för att $x+h$ skall tillhöra I. Funktionen f är kontinuerlig och antar därför ett största värde y_{max} och ett minsta värde y_{min} på $[x, x+h]$.

Arean av det randiga området är $A(x+h) - A(x)$, och vi har övre och undre begränsningar enligt $hy_{min} \leq A(x+h) - A(x) \leq hy_{max}$.



Eftersom $h>0$ får vi $y_{min} \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq y_{max}$

Både y_{min} och y_{max} antas i $[x, x+h]$, dvs $y_{min} = f(z)$ och $y_{max} = f(w)$ för några $z, w \in [x, x+h]$.

Låter vi nu $h \to 0^+$ måste $f(z) \to f(x)$ och $f(w) \to f(x)$ eftersom f är kontinuerlig, och alltså

$$\lim_{h \to 0^+} f(z) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} f(w).$$

Uttrycket i mitten är högerderivatan av $A(x)$, och denna blir lika med $f(x)$ enligt instängningsregeln.

Om istället $h<0$ ligger w och z i $[x+h, x]$, och vi får

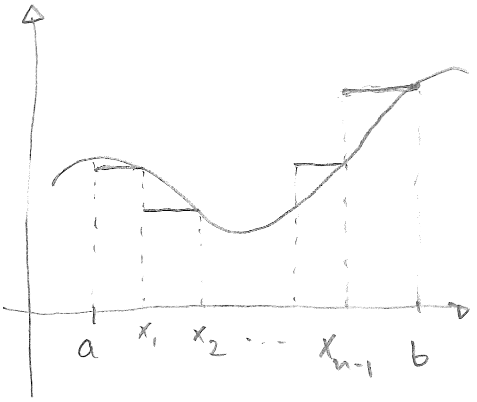
$$|h| y_{min} \leq A(x) - A(x+h) \leq |h| y_{max} \Leftrightarrow$$

$$-h y_{min} \leq A(x) - A(x+h) \leq -h y_{max} \Leftrightarrow$$

$$y_{min} \leq \frac{A(x)-A(x+h)}{-h} \leq y_{max} \Leftrightarrow$$

$$y_{min} \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq y_{max}.$$

dvs $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$. Om alla



rektanglarna blir fler och smalare samtidigt känns det

rimligt att $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$ är lika med arean

mellan $x=a$ och $x=b$, dvs $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j = F(b)-F(a)$.

Detta är bakgrunden till följande

Definition: Antag att f är kontinuerlig i ett intervall I som innehåller a och b.

Den <u>bestämda integralen</u> av f mellan a och b

betecknas $\int_a^b f(x)\,dx$ och definieras av

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ för någon primitiv

funktion $F(x)$ till $f(x)$.

Anmärkning: I summan $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$ svarar Δx_j mot dx

och summatecknet mot integraltecknet.

Exempel: Bestäm arean under $f(x)=\sin x$ mellan $x=0$ och $x=\pi$.

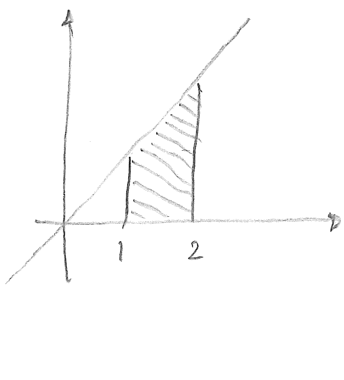
Enligt definitionen av bestämd integral är den sökta arean

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2.$$

Tecknen $[\ \ ]_a^b$ kallas insättningstecken, och fungerar enligt $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Exempel: Vi beräknar arean under $f(x)=x$ mellan $x=1$ och $x=2$, vilken enligt areasatsens följdsats, och definitionen av bestämd integral, blir

$$A=\int_1^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{3}{2}.$$



Vi kan även beräkna arean genom att använda summan

$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$. Vi behöver då en lämplig indelning av $[1,2]$, exempelvis $x_j=1+\frac{j}{n}$.

Med denna blir $x_0 = 1$, $x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2$, och

$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \left(1 + \frac{j}{n}\right) - \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Vi får nu

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot \Delta x_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{j}{n}\right)\cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = [\text{aritmetisk summa}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot n + \frac{1}{n^2}\cdot \frac{(n+1)n}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Insättningstekniken används även då vi behöver partialintegrera.

Exempel: Beräkna $\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\, dx$.

Vi partialintegrerar och får

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} -e^{-x}\, dx =$$

$$= \left(-\frac{\ln 2}{2}\right) - \left(-0\cdot e^{-0}\right) + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\, dx =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{\ln 2}{2} + \left(-e^{-\ln 2}\right) - \left(-e^{-0}\right) =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$