MVE425 Matematik, del D, våren 2018, Föreläsning 13 (1.)

Mårten Wadenbäck

Räkneregler för bestämda integraler

Under förutsättningen att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på I och att a, b, c ligger i I gäller räknereglerna

$$\left.\begin{array}{ll}(i) & \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ (ii) & \int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{om } k \text{ är konstant}\end{array}\right\} \text{linearitet}$$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Bevis: (i) Enligt definitionen av bestämd integral är

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$

$$= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx,$$

där $F(x)$ och $G(x)$ är primitiver till $f(x)$ respektive $g(x)$.

(ii) Om k är konstant är

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(b) - kF(a) =$$

$$= k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) Enligt definitionen får vi

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = (\cancel{F(c)} - F(a)) + (F(b) - \cancel{F(c)}) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iv) Definitionen ger

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Lineariteten använder vi utan att egentligen tänka på det, och den är bekant från de obestämda integralerna. Regel (iii) är väldigt användbar då vi integrerar funktioner som ges av olika uttryck på olika intervall.

Exempel: Bestäm $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{1+|x|}$.

Brytpunkten för absolutbeloppet är i $x=0$, så vi kan med fördel dela upp där:

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{1+|x|} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{1+|x|} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{1+|x|} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{1-x} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \Big[-\ln|1-x|\Big]_{-2}^{0} + \Big[\ln|1+x|\Big]_{0}^{3} =$$

$$= \underbrace{-\ln|1-0|}_{=0} + \ln|1-(-2)| + \ln|1+3| - \underbrace{\ln|1+0|}_{=0} =$$

$$= \ln 3 + \ln 4 = \ln(12)$$

Regel (iv) kan behövas i samband med variabelbyten.

Exempel: Beräkna $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{t^2}{1+(1-t^3)^2}\,dt$

Vi använder variabelbytet $u = 1-t^3$ och får

$$\int_{0}^{2} \frac{t^2}{1+(1-t^3)^2}\,dt = \begin{bmatrix} u = 1-t^3 \\ du = -3t^2 dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\int_{0}^{2} \frac{-3t^2}{1+(1-t^3)^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{1}^{-7} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\int_{-7}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\Big[\arctan u\Big]_{-7}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(-7)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \arctan 7\right).$$

Observera hur gränserna ändras vid variabelbyte!

Exempel: Beräkna $\displaystyle\int_{0}^{5} e^{\sqrt{x}}\,dx.$

Vi byter ut det "jobbiga" $\sqrt{x}$ och får

$$\int_{0}^{5} e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{x} \\ x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{bmatrix} = \int_{0}^{\sqrt{5}} e^{u} \cdot 2u\,du =$$

$$= [\text{partialintegration}] = \left[e^u \cdot 2u\right]_0^{\sqrt{5}} - \int_0^{\sqrt{5}} e^u \cdot 2\,du =$$

$$= e^{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} - 0 - \left[2e^u\right]_0^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} - (2e^{\sqrt{5}} - 2) = 2\sqrt{5}\,e^{\sqrt{5}} - 2e^{\sqrt{5}} + 2.$$

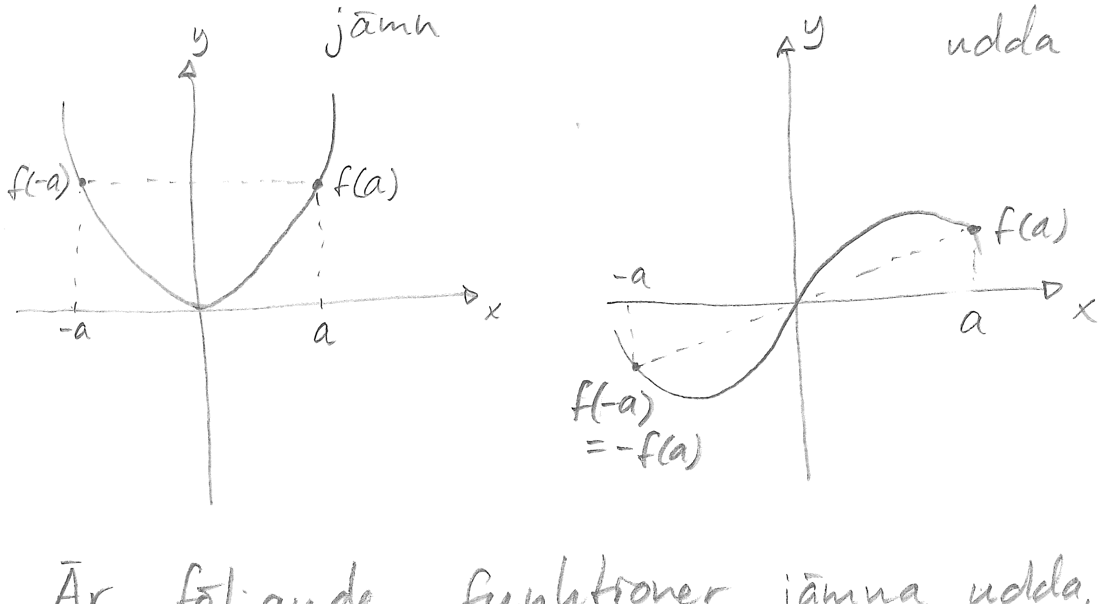
Följande egenskaper har med symmetri att göra, och är användbara i sådana sammanhang.

Definition: En funktion f kallas

(i) <u>jämn</u> om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$

(ii) <u>udda</u> om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D_f$.

Figur:



Exempel: Är följande funktioner jämna, udda, både och, eller ingetdera?

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sin(x^3)$

d) $f(x) = e^x$ e) $f(x) = 0$ f) $f(x) = \cos x$.

Vi testar definitionen av jämn respektive udda:

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \neq -f(x)$ jämn, ej udda

b) Om $f(x) = \sqrt{x}$ är definierad för ett $x = a$ kan vi inte sätta in $-a$, så f kan inte vara jämn eller udda

c) $f(-x) = \sin((-x)^3) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) = -f(x) \neq f(x)$, alltså är f udda och inte jämn

d) $f(-x) = e^{-x} \neq e^{x} = f(x)$, så ej jämn
$f(-x) = e^{-x} > 0 > -e^{x} = -f(x)$, så ej udda

e) $f(-x) = 0 = f(x)$ och $f(-x) = 0 = -f(x)$, så f är både jämn och udda (enda sådana funktionen!)

f) $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, så jämn, ej udda

Om f är en jämn funktion så är

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \left[\begin{array}{l}\text{byte i första integralen} \\ u = -x, \quad du = -dx\end{array}\right] =$$

$$= \int_{a}^{0} f(-u)\cdot(-du) + \int_{0}^{a} f(x)dx = \left[f(-u) = f(u)\right] =$$

$$= \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = \begin{bmatrix} \text{integrations-} \\ \text{variabelns namn} \\ \text{spelar ingen roll} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Om f är en udda funktion får vi på liknande sätt att $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \ldots = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$

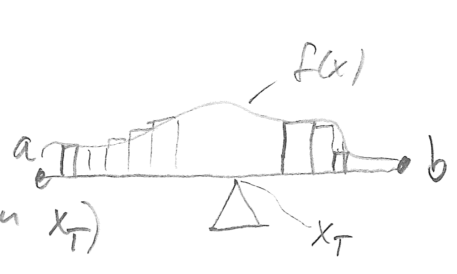
Exempel: Bestäm $\int_{-5}^5 \frac{e^{-x^{15}} - e^{x^{15}}}{x^2}\,dx.$

Det visar sig att $f(x) = \frac{x^{-15} - x^{15}}{x^2}$ är en udda funktion:

$$f(-x) = \frac{e^{-(-x)^{15}} - e^{(-x)^{15}}}{(-x)^2} = \frac{e^{x^{15}} - e^{-x^{15}}}{x^2} = -\frac{e^{-x^{15}} - e^{x^{15}}}{x^2} = -f(x),$$

så vi behöver inte räkna ut en primitiv funktion till $f(x)$ (vilket vi inte hade klarat), utan får av symmetrin att $\int_{-5}^5 \frac{e^{-x^{15}} - e^{x^{15}}}{x^2}\,dx = 0.$

Exempel: Antag att vi har en smal spets (i punkten x_T) vilken vi skall balansera en stång med någon sorts last på.



Om den vertikala kraften på stången i punkten x är $f(x)$, så ger krafterna

mellan x och $x+h$ (där h är väldigt litet) upphov momentet $\approx (x-x_T)f(x)\cdot h = (x-x_T)f(x)\Delta x$ (kraften $f(x)\Delta x$ gånger hävarmen $x-x_T$).

Totala momentet fås genom att summera alla momentbidrag och göra finare och finare indelning: $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_T)f(x_j)\Delta x_j =$

$$= \int_a^b (x-x_T)f(x)\,dx = \int_a^b x f(x)\,dx - x_T\int_a^b f(x)\,dx$$

eftersom x_T är konstant. Om stången är i balans är momentet noll, dvs

$$\int_a^b x f(x)\,dx - x_T\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$$

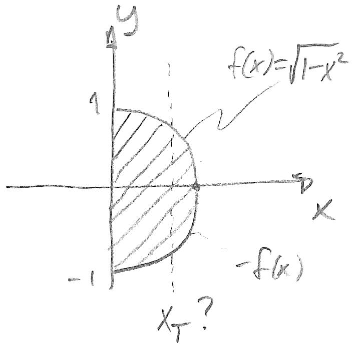
$$\int_a^b x f(x)\,dx = x_T\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$x_T = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Vi har alltså ovanstående formel för tyngdpunkten x_T i x-led.

Exempel: Bestäm tyngdpunkten av halvcirkelskivan

som ges av $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.



Området är symmetriskt kring x-axeln, så tyngdpunkten i y-led, y_T, ligger på x-axeln.

Övre cirkelbågen ges av $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, och eftersom det finns precis lika stor kraft/area/massa nedanför x-axeln räknar vi med $2f(x)$.

Enligt förra exemplet får vi tyngdpunkten till

$$x_T = \frac{\int_0^1 x \cdot 2f(x)\,dx}{\int_0^1 2f(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx}{\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx}.$$

Den övre integralen blir

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u=1-x^2 \\ du=-2x\,dx \end{bmatrix} = -\int_1^0 \sqrt{u}\,du = \int_0^1 \sqrt{u}\,du =$$

$$= \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3},$$

och den undre blir

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=\sin u \\ dx=\cos u\,du \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u\,du =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{\cos^2 u} \cdot \cos u \, du = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 u \, du =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2u)) \, du = \left[u + \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Alltså blir $x_T = \frac{2/3}{\pi/2} = \frac{4}{3\pi} \approx 0.42.$

Tyngdpunkten är alltså i punkten $(\frac{4}{3\pi}, 0)$,

som ligger ungefär här