MVE425 Matematik, del D, våren 2018, föreläsning 14

Mårten Wadenbäck

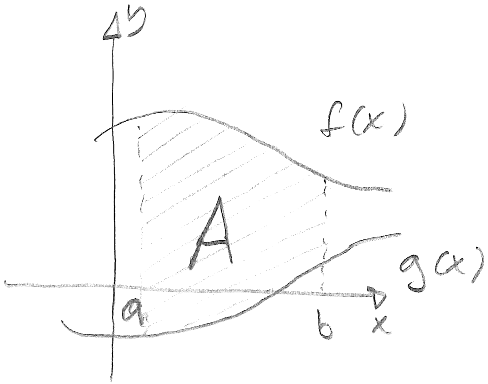
Areor och volymer

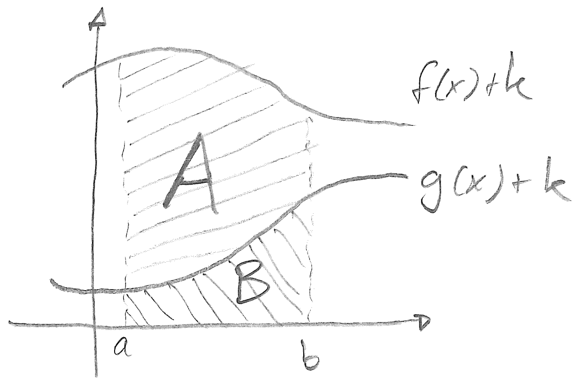
Vi generaliserar areasatsens följdsats till följande variant.

Sats: Om f och g är kontinuerliga och uppfyller $f(x) \geq g(x)$ i ett intervall som innehåller a och b så ges arean under f och över g mellan $x=a$ och $x=b$ av

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Bevis: Idén bygger på att "lyfta upp" båda funktionskurvorna lika mycket på ett sätt så att båda hamnar ovanför x-axeln.





Väljer vi $k \geq |m|$, där m är minsta värdet $g(x)$ antar på $[a,b]$, kommer båda kurvorna att ligga över x-axeln. Vi får nu

$$A = (A+B) - B = \int_a^b (f(x)+k)\,dx - \int_a^b (g(x)+k)\,dx =$$

$$= \int_a^b (f(x)+k-g(x)-k)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

Exempel: Bestäm arean av området som begränsas av kurvorna $y = 1-x^2$ och $y = x^3-x$.

Vi börjar med att bestämma kurvornas skärningspunkter så att vi vet a och b:

$$1-x^2 = x^3-x \Leftrightarrow x^3+x^2-x-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

($x=1$ är en lösning, dela med $x-1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & = x^2+2x+1 \\
\hline
x-1 & \cancel{x^3}+\cancel{x^2}-\cancel{x}-1 \\
 & -(\cancel{x^3}-\cancel{x^2}) \\
\hline
 & \cancel{2x^2}-x-\cancel{x} \\
 & -(\cancel{2x^2}-\cancel{2x}) \\
\hline
 & x-1 \\
 & -(x-1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

)

$$(x-1)(x+2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Vi skall alltså integrera från $x=-1$ till $x=1$.

Vilken av kurvorna är överst där?

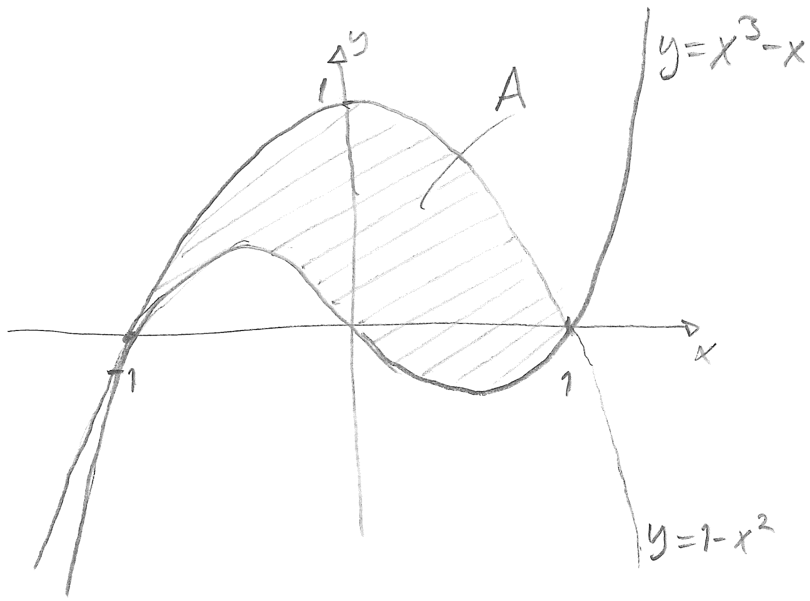
Sätter vi in exempelvis $x=0$ får vi

$1-0^2=1>0=0^3-0$, så $y=1-x^2$ är den översta.

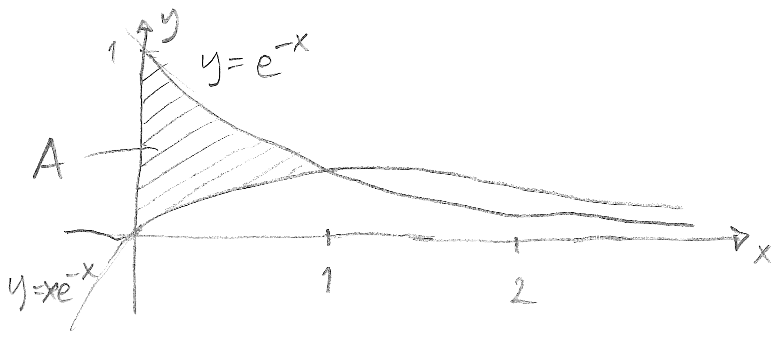
Arean blir

$$A=\int_{-1}^{1}(1-x^2-x^3+x)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\left(-1-\frac{-1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$



Exempel: Bestäm arean av området som begränsas av kurvorna $y=xe^{-x}$, $y=e^{-x}$ samt y-axeln.



Vi börjar med att se var kurvorna skär:

$$xe^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow xe^{-x} - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vi får alltså arean till

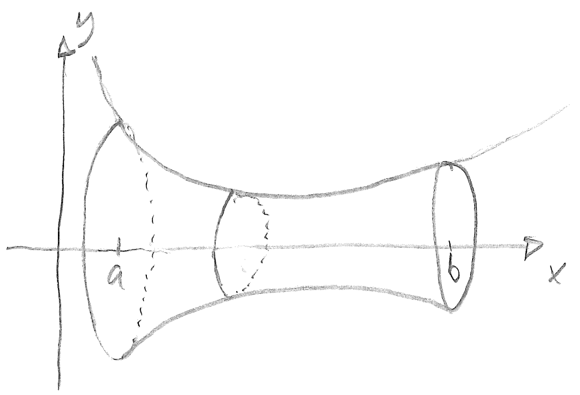
$$A = \int_0^1 (e^{-x} - xe^{-x})dx = \int_0^1 e^{-x}(1-x)dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= [-e^{-x}(1-x)]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\cdot(-1)dx = 0-(-1) - \int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= 1 + [e^{-x}]_0^1 = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}.$$

Integraler kan användas för att beräkna rotationsvolymer, dvs volymer som uppstår då en kurva roteras kring någon av koordinataxlarna.

Om $f(x)$ roteras kring x-axeln får vi för varje x-värde en cirkulär skiva med radien $f(x)$ och arean $\pi f(x)^2$.



Tänker vi oss dx som ett väldigt litet tal (som det ju inte är) kan vi summera oändligt många tunna skivor $\pi f(x)^2 dx$

för att få volymen mellan a och b till

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

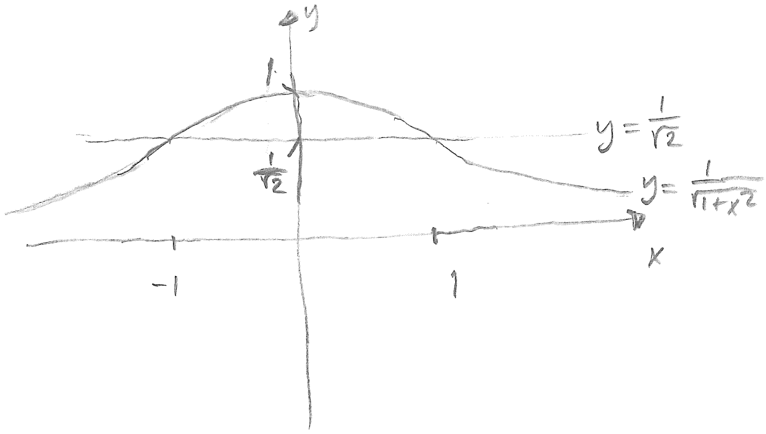
Exempel: Beräkna volymen av ett klot med radie R genom lämplig rotationsvolym.

Sett från z-axeln ser klotet ut som en cirkel $x^2+y^2=R^2$, så klotet uppstår då exempelvis kurvan $y=\sqrt{R^2-x^2}$ roteras kring x-axeln. Enligt formeln för rotationsvolym får vi därför

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right) = \pi \left(2R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Exempel: Kurvan $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ roteras kring x-axeln, och sedan borras det bort en cylinder med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och centralaxel i x-axeln. Bestäm volymen av den servettringformade kroppen som blir kvar.



Vi börjar med att hitta skärningspunkterna:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Kroppens volym får vi av

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx-\underbrace{\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx}_{\text{cylindern}}=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}-\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dx=\pi\Big[\arctan x\Big]_{-1}^{1}-\left[\frac{\pi x}{2}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi^2}{2}-\pi.$$

Om vi är intresserade av att beräkna massan av en inhomogen rotationskropp där densiteten ges av en funktion $\rho(x)$ får vi tunna skivor med massan $\rho(x)\cdot\pi f(x)^2 dx$, så totala massan kommer att ges av

$$M=\pi\int_a^b \rho(x)f(x)^2\,dx.$$

Exempel: Mellan $x=0$ och $x=2$ bildas en kon då kurvan $y=\frac{x}{2}$ roteras kring x-axeln. Om densiteten ges av $\rho(x)=1+x^2$, vad blir då konens volym?

Formeln för rotationskroppens massa ger

$$M=\pi\int_0^2 (1+x^2)\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx=\pi\int_0^2\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{3}+\frac{32}{5}\right)=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{5}\right)=\frac{34\pi}{15}.$$